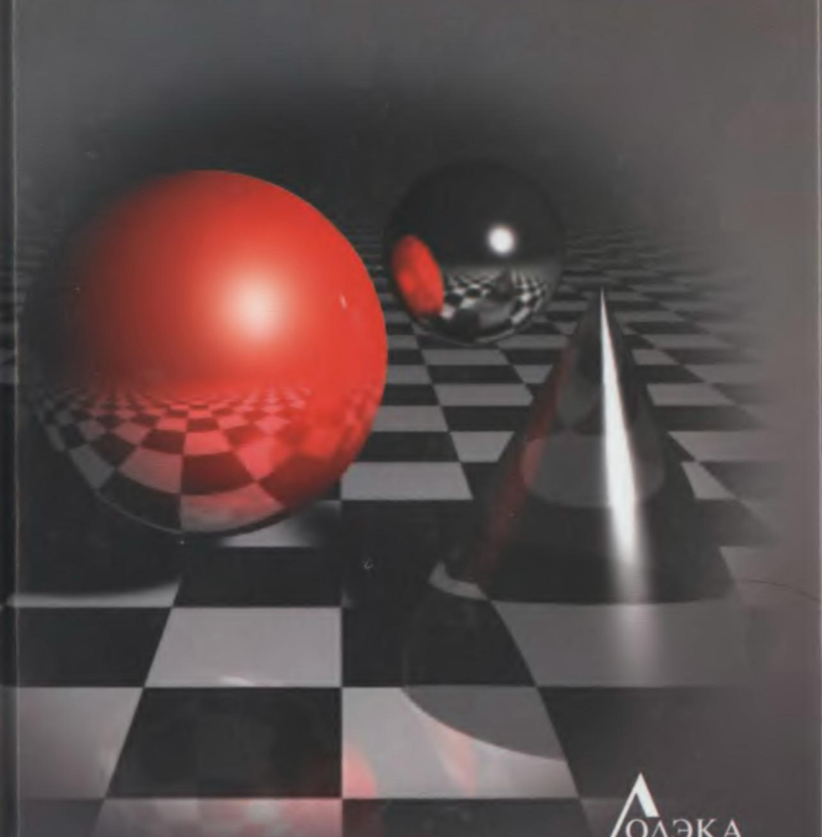
Джон Бёрд

Карманный справочник

Newnes

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА



ДОДЭКА

www.dodeca.ru

Карманный справочник

Инженерная математика

ДОДЭКА

Карманный справочник

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

ОДЭКА

John Bird

Newnes

Engineering Mathematics

Pocket Book

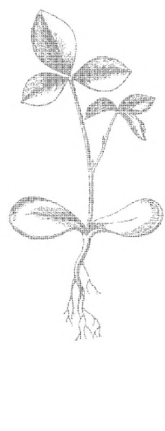
Third edition

Newnes

Джон Бёрд

Карманный справочник

Инженерная математика



ДОДЭКА

МОСКВА
Издательский дом «Додэка-XXI»
2008

УДК 51(03)
ББК 22.1
Б48

Бёрд Дж.

Б48 Инженерная математика: Карманный справочник/Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Додэка-XXI», 2008. — 544 с.: ил. (Серия «Карманный справочник»).

ISBN 978-5-94120-150-1

Справочник содержит практически все разделы аппарата современной математики, которые используются в инженерном деле, такие как алгебра, геометрия, тригонометрия, теория матриц и детерминантов, булева алгебра и логические схемы, дифференциальное и интегральное исчисление, статистика и теория вероятностей, и т. д. Основные положения теории иллюстрируются многочисленными практическими примерами и задачами.

Будет полезен инженерно-техническим работникам, студентам и абитуриентам технических вузов и колледжей.

УДК 51 (03)
ББК 22 1

Настоящее издание **«Инженерная математика. Карманный справочник» Джона Бёрда** выполнено по договору с Elsevier Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, OX5 1GB, England

ISBN 0 7506 49925 (англ.)

ISBN 978-5-94120-150-1 (рус.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Карманный справочник по инженерной математике — доступный источник основных инженерных математических формул, определений и базовой информации, необходимых студентам, техническим специалистам и инженерам в процессе обучения и/или работы. Это уникальная по своему содержанию и структуре книга: в ней можно найти ответ практически на любой вопрос.

Для удобства материал разделен на 14 глав, включающих арифметику и алгебру, геометрию и тригонометрию, графики, векторы, комплексные числа, матрицы и детерминанты, булеву алгебру и логические схемы, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, статистику и теорию вероятностей, преобразования Лапласа и ряды Фурье. Книга содержит 93 раздела и более 400 числовых примеров, а также более 300 рисунков.

Глава 1

Числа и алгебра

1.1. ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ

1.1.1. Арифметические действия

Числа вида 3, 5, 72, используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называют *натуральными*. Натуральные числа 3, 5, 72 называют также *положительными целыми числами*. Числа –13, –6, –5, противоположные натуральным, называют *отрицательными целыми числами*. Число 0 также считается целым числом. Итак, целые числа — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Существуют четыре базовых арифметических действия: сложение (+), вычитание (–), умножение (×) и деление (:).

Сложение любого числа с отрицательным числом равносильно вычитанию из этого числа равного по величине, но взятого с противоположным знаком числа. Так, например, при сложении –4 и 3 получаем $3 - 4 = -1$.

Вычитание отрицательного числа равносильно сложению с соответствующим положительным числом. Так, например, при вычитании –4 из 3 получаем $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$.

При умножении и делении чисел с противоположными знаками результат действия отрицательный; при умножении и делении чисел с одинаковыми знаками результат положительный. Так, например, $3 \times (-4) = -12$; $(-3) \times (-4) = 12$.

Аналогично $\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$ и $\frac{-4}{-3} = +\frac{4}{3}$.

Пример. Сложить 27, –74, 81 и –19.

Сначала складываем положительные целые: 27 и 81. Сумма положительных целых будет равна $27 + 81 = 108$. Затем складываем отрицательные целые: –74 и –19. Сумма отрицательных целых будет равна –93. Теперь вычитаем сумму отрицательных целых чисел, т. е. –93, из суммы положительных целых чисел 108 и получаем 15. Таким образом, $\mathbf{27 - 74 + 81 - 19 = 15}$.

Пример. Вычесть 89 из 123, что математически записывается в виде 123 – 89, или

$$\begin{array}{r} _{-}123 \\ \underline{89} \\ 34 \end{array}$$

Следовательно, **123 – 89 = 34**.

Пример. Умножить 74 на 13, что математически записывается в виде 74 × 13.

$$\begin{array}{rrcll} & \times\,74 & & & \\ & \underline{13} & & & \\ \text{Складываем}\left.\begin{array}{r} \\ \\ \end{array}\right\} & 222 & \leftarrow & 74\times 3 & \multirow{2}{*}{} \\ & \underline{740} & \leftarrow & 74\times 10 & \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.\text{Умножаем} \\ & 962 & & & \end{array}$$

Следовательно, **74 × 13 = 962**.

При делении на число от 1 до 12, как правило, используется так называемый *сокращенный способ деления,* или *ускоренное деление,* т. е. *деление в строчку.*

Пример. Разделить 1043 на 7.

$$10^{3}4^{6}3 : 7 = 149.$$

Шаг 1. Делим 10 на 7. Получаем 1 и остаток 3. Пишем 1 в ответ, а остаток 3 записываем в следующий разряд справа над цифрой 10. Получаем 34.

Шаг 2. Делим 34 на 7. Получаем 4 и остаток 6. Пишем 4 в ответ, а остаток 6 записываем в следующий разряд справа над цифрой 4. Получаем 63.

Шаг 3. Делим 63 на 7. Получаем 9 и остаток 0. Пишем 9 в ответ. Получаем 149, т. е. **1043 : 7 = 149**.

При делении на число больше 12 обычно используется метод *деления в столбик*, или *деление углом.*

Пример. Разделить 378 на 14.

$$\begin{array}{llr|l} & & 378 & \underline{\;14\;} \\ (2) & 2\times 14 \rightarrow & \underline{28\;} & 27 \\ & & 98 & \\ (4) & 7\times 14 \rightarrow & \underline{98} & \\ & & 0 & \end{array}$$

Шаг 1. Делим 37 на 14, получаем 2. Пишем 2 в ответ.

Шаг 2. Умножаем 2 на 14, получаем 28.

Шаг 3. Вычитаем 28 из 37, получаем 9. Оставшуюся цифру 8 записываем справа от 9. Получаем 98.

Шаг 4. Делим 98 на 14. Получаем 7. Записываем 7 в ответ. Следовательно, **378 : 14 = 27**.

Шаг 5. Вычитаем. Получаем 0. Деление закончено.

Итак, **378** : **14 = 27**.

1.1.2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

При перемножении двух и более чисел каждое отдельно взятое число называется *множителем.*

Делитель — число, на которое другое число делится без остатка. *Наибольший общий делитель* — наибольшее число, на которое два или более числа делятся без остатка.

Чтобы найти наибольший общий делитель чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение тех множителей, которые входят во все разложения, взяв каждый наименьшее число раз, какое он встречается.

Пример. Найти наибольший общий делитель чисел 12, 30 и 42.

Разложим эти числа на простые множители, т. е. 2, 3, 5, 7, 11, 13... (на какие возможно):

$$\begin{array}{rl} 12 = & \boxed{2} \times 2 \times 3 \\ 30 = & \boxed{2} \times 3 \times 5 \\ 42 = & \boxed{2} \times 3 \times 7 \end{array}$$

Общими делителями этих чисел являются 2 в первом столбце и 3 в третьем. Следовательно, *наибольший общий делитель* равен **2** × **3**, т. е. **6**. Таким образом, **6** есть *наибольшее число*, на которое делится и **12,** и **30**, и **42**.

Кратное — число, которое определенное количество раз содержит другое *число. Наименьшее общее кратное* — наименьшее число, делимое на каждое из двух и более чисел без остатка.

Чтобы определить наименьшее кратное двух или более чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся множителей, взяв каждый наибольшее число раз, какое он встречается.

Пример. Найти наименьшее общее кратное чисел 12, 42 и 90.

Разложим эти числа на простые множители:

$$\begin{array}{rl} 12 = & \boxed{2 \times 2} \times 3 \\ 42 = & 2 \times 3 \times \boxed{7} \\ 90 = & 2 \times \boxed{3 \times 3} \times \boxed{5} \end{array}$$

Наибольшее число раз встречаются множители, заключенные в рамки, т. е. 2 × 2 для 12, 7 для 42 и 3 × 3 и 5 для 90. Следовательно, наименьшее общее кратное будет равно **2** × **2** × **3** × **3** × **5** × **7 = 1260**. Это число одновременно является наименьшим числом, которое будет делиться без остатка на 12, 42 и 90.

1.1.3. Порядок выполнения математических действий и скобки

Если какое-либо арифметическое действие необходимо выполнить первым, его числа и оператор (операторы) заключают в скобки. Так, разность 6 и 2, умноженная на 3, записывается в виде $3 \times (6 - 2)$, или $3(6 - 2)$.

Арифметические действия выполняются в следующей последовательности: (1) действия, заключенные в скобки, (2) деление и умножение и (3) сложение и вычитание.

Поясним основные свойства, или основные законы, алгебры на примерах.

Переместительный закон

$2 + 3 = 3 + 2$, т. е. при сложении порядок следования чисел не влияет на результат.

$2 \times 3 = 3 \times 2$, т. е. при умножении порядок следования чисел не влияет на результат.

Сочетательный закон

$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$, т. е. использование скобок при сложении не влияет на результат.

$2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$, т. е. использование скобок при умножении не влияет на результат.

Распределительный закон

$2 \times (3 + 4) = 2(3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$, т. е. число, стоящее перед скобками, указывает на то, что каждое из слагаемых в скобках должно быть умножено на это число.

Использование скобок

$(2 + 3)(4 + 5) = (5)(9) = 45$, т. е. рядом стоящие скобки означают умножение.

$2[3 + (4 \times 5)] = 2[3 + 20] = 2 \times 23 = 46$, т. е., если выражение содержит внешние и внутренние скобки, сначала вычисляется выражение во внутренних скобках.

Пример. Определить значение выражения $6 + 4 : (5 - 3)$.

$6 + 4 : (5 - 3) = 6 + 4 : 2$(скобки),
$= 6 + 2$ (деление),
$= \mathbf{8}$ (сложение).

Пример. Вычислить $13 - 2 \times 3 + 14 : (2 + 5)$.

$13 - 2 \times 3 + 14 : \mathbf{(2 + 5)} = 13 - 2 \times 3 + 14 : 7$ (скобки),
$13 - 2 \times 3 + \mathbf{14 : 7} = 13 - 2 \times 3 + \mathbf{2}$ (деление),
$13 - \mathbf{2 \times 3} + 2 = 13 - \mathbf{6} + 2$ (умножение),
$\mathbf{13} - 6 + \mathbf{2} = \mathbf{15} - 6$ (сложение),
$\mathbf{15} - \mathbf{6} = \mathbf{9}$ (вычитание).

1.2. ДРОБИ, ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ

1.2.1. Дроби

Деление 2 на 3 может быть записано в виде $\frac{2}{3}$, или 2/3, где $\frac{2}{3}$ — *дробь*. Число над чертой, т. е. 2, называется *числителем*, число под чертой, т. е. 3, называется *знаменателем*.

Если величина числителя меньше величины знаменателя, такая дробь называется *правильной*. Следовательно, $\frac{2}{3}$ — *правильная дробь*.

Если величина числителя больше величины знаменателя, такая дробь называется *неправильной*. Так, $\frac{7}{3}$ — *неправильная дробь* и может быть выражена в виде *смешанного числа*, т. е. в виде целой и дробной частей. Неправильная дробь $\frac{7}{3}$ соответствует смешанному числу $2\frac{1}{3}$.

Если при делении числителя и знаменателя на одно и то же число дробь упрощается, такая процедура называется ***сокращением***. Сокращение на 0 недопустимо.

Пример. Упростить $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$.

Наименьшее общее кратное двух знаменателей есть 3×7, т. е. 21. Приведем каждую дробь к знаменателю 21:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{7} = \left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{3}{3}\right).$$

В результате получаем $\frac{7}{21}+\frac{6}{21}$ или $\frac{7+6}{21} = \mathbf{\frac{13}{21}}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{7} = \frac{\overset{\text{Шаг (2)}}{\overset{\downarrow}{(7\times 1)}} + \overset{\text{Шаг (3)}}{\overset{\downarrow}{(3\times 2)}}}{\underset{\text{Шаг (1)}}{\underset{\uparrow}{21}}}$$

Шаг 1. Вычислим наименьшее общее кратное двух знаменателей.

Шаг 2. (Для дроби $\frac{1}{3}$.) Делим 21 на 3. Получаем 7. Следовательно, числитель надо умножить на 7, т. е. 7×1.

Шаг 3. (Для дроби $\frac{2}{7}$.) Делим 21 на 7. Получаем 3. Следовательно, числитель надо умножить на 3: 3×2.

В результате получаем **тот же результат, что и ранее**, т. е. $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7+6}{21} = \frac{13}{21}$.

Пример. Вычислить $3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}$.

Способ 1. Разобьем смешанные числа на целые и дробные части:

$$3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} = \left(3 + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{6}\right) = 3 + \frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{6} =$$

$$= 1 + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = 1\frac{3}{6} = \mathbf{1\frac{1}{2}}.$$

Способ 2. Выразим смешанные числа в виде неправильных дробей. Поскольку $3 = \frac{9}{3}$, а $2 = 12/6$, то $3\frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ и $2\frac{1}{6} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$.

В результате получаем **тот же результат**, что и ранее, т. е. $3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} = \frac{11}{3} - \frac{13}{6} = \frac{22}{6} - \frac{13}{6} = \frac{9}{6} = \mathbf{1\frac{1}{2}}$.

Пример. Вычислим $\frac{3}{7} \times \frac{14}{15}$.

Делим числитель и знаменатель на 3. Получаем

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}}{7} \times \frac{14}{\cancel{15}_{5}} = \frac{1}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{1 \times 14}{7 \times 5}.$$

Делим числитель и знаменатель на 7. Получаем

$$\frac{1 \times {}^{2}\cancel{14}}{{}_{1}\cancel{7} \times 5} = \frac{1 \times 2}{1 \times 5} = \frac{2}{5}.$$

Следовательно, $3/7 \times 14/15 = \mathbf{2/5}$.

Деление числителя и знаменателя на одно и то же число называется *сокращением*. Это действие можно выполнить и так:

поменять во второй дроби местами числитель и знаменатель и заменить деление умножением.

Пример. Разделим $\frac{3}{7}:\frac{12}{21}$.

Запишем эту дробь иначе: $\frac{3}{7}:\frac{12}{21} = \dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{12}{21}}$.

Умножение числителя и знаменателя на величину, обратную знаменателю, дает

$$\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{12}{21}} = \dfrac{\frac{{}^{1}\cancel{3}}{{}_{1}\cancel{7}} \times \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{12}_{4}}}{\frac{{}_{1}\cancel{12}}{{}_{1}\cancel{21}} \times \frac{\cancel{21}^{1}}{\cancel{12}^{1}}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{1} = \mathbf{\frac{3}{4}},$$

т. е. получаем тот же результат, что и при сокращении обычным способом: $\frac{3}{7} \div \frac{12}{21} = \frac{{}^{1}\cancel{3}}{{}_{1}\cancel{7}} \times \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{12}_{4}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$.

1.2.2. Отношение и пропорция

Отношение одной величины к другой есть дробь; оно показывает, сколько раз одна величина содержится в другой величине *того же вида*.

Если одна величина ***прямо пропорциональна*** другой, то при удваивании первой величины вторая также удваивается. Если одна величина ***обратно пропорциональна*** другой, то при удваивании одной из величин другая в 2 раза уменьшается.

Пример. Брус длиной 273 см разрезали на три части, отношение между длинами которых 3 : 7 : 11. Определить длину каждой части бруса.

Общее число частей 3 + 7 + 11 = 21. Следовательно, 21 часть соответствует 273 см.

1 часть соответствует $\frac{273}{21} = 13$ см.

3 части соответствуют $3 \times 13 = 39$ см.

7 частей соответствуют $7 \times 13 = 91$ см.

11 частей соответствуют $11 \times 13 = 143$ см.

Итак, длина трех частей равна соответственно **39, 91 и 143 см**.

П р о в е р к а. 39 + 91 + 143 = **273.**

Пример. Зубчатое колесо (шестерня) с 80 зубьями находится в зацеплении с шестерней с 25 зубьями. Определить передаточное отношение.

Передаточное отношение определяется так:

$$\text{Передаточное отношение} = 80 : 25 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5} = 3.2\,,$$

т. е. передаточное отношение = **16 : 5 или 3.2 : 1.**

Пример. Сплав состоит из металлов A и B, соотношение их масс равно 2.5:1. Определить, какое количество металла A надо добавить к 6 кг металла B для получения такого сплава.

Отношение $A : B = 2.5 : 1$, т. е. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2.5}{1} = 2.5$.

Следовательно, если $B = 6$ кг, $\dfrac{A}{6} = 2.5$, имеем $A = 6 \times 2.5 =$ **15 кг**.

Пример. Три человека могут выполнить работу за 4 часа. Определить, сколько времени потребуется 5 рабочим для выполнения той же задачи при условии, что производительность труда остается прежней.

Чем больше рабочих, тем быстрее выполняется работа. Следовательно, здесь имеет место обратно пропорциональная зависимость:

3 человека выполняют работу за 4 часа,

1 человек выполняет работу за время, втрое большее, т. е. за $4 \times 3 = 12$ часов,

5 человек могут сделать работу в 5 раз быстрее, чем один человек, т. е. за $\dfrac{12}{5}$ часов, или **2 часа 24 минуты**.

1.2.3. Десятичные дроби

Десятичная система исчисления основана на *цифрах* от 0 до 9. Число типа 53.17 — *десятичная дробь,* точка отделяет целую часть 53 от дробной части 0.17.

Число, которое может быть точно выражено в виде десятичной дроби, называют *конечной десятичной дробью*, а число, которое не может быть точно выражено в виде десятичной дроби, — *бесконечной десятичной дробью*. Таким образом, $\dfrac{3}{2} = 1.5$ — это конечная десятичная дробь, а $\dfrac{4}{3} = 1.33333\ldots$ — бесконечная десятичная дробь. Число 1.33333... можно записать в виде 1.3(3), т. е. «одна целая, три в периоде».

В зависимости от требуемой точности бесконечная десятичная дробь может быть записана двумя способами: (1) с точностью до некоторого количества *значащих цифр*, т. е. цифр, которые что-то означают, и (2) с точностью до определенного *десятичного разряда*, т. е. определенного количества знаков после десятичной точки.

Цифра последнего десятичного разряда в ответе не меняется, если справа за ней стоит цифра 0, 1, 2, 3 или 4; и она увеличивается на 1, если справа стоит цифра 5, 6, 7, 8 или 9. Таким образом, бесконечная дробь 7.6183 при округлении до третьей значащей цифры превращается в 7.62, так как дальше справа стоит цифра 8, принадлежащая группе 5, 6, 7, 8, 9. При округлении до третьего десятичного разряда 7.6183 превращается в 7.618, поскольку справа от цифры 8 стоит цифра 3.

Пример. Вычислить 42.7 + 3.04 + 8.7 + 0.06.

Запишем числа таким образом, чтобы точки находились друг под другом. Будем складывать числа в каждом столбце и начнем справа:

$$
\begin{array}{r@{.}l}
+\,42 & 7 \\
3 & 04 \\
8 & 7 \\
0 & 06 \\
\hline
54 & 50
\end{array}
$$

В результате получаем **42.7 + 3.04 + 8.7 + 0.06 = 54.50**.

Пример. Вычислить 74.3×3.8.

При умножении десятичных дробей числа перемножаются так, как если бы они были целыми, т. е.

$$
\begin{array}{r}
\times\, 743 \\
38 \\
\hline
+\, 5944 \\
22290 \\
\hline
28234
\end{array}
$$

Положение десятичной точки определяется общим количеством знаков справа после десятичной точки в обоих сомножителях. Здесь в двух перемножаемых числах $(1 + 1) = 2$ знака после десятичной точки ($74.\underline{3} \times 3.\underline{8}$).

Следовательно, $\mathbf{74.\bar{3} \times 3.\bar{8} = 282.34}$.

Пример. Вычислить 37.81 : 1.7 с точностью до 4 значащих цифр и 4 десятичного разряда.

Умножаем знаменатель на 10. Умножаем также числитель на 10, чтобы сохранить значение дроби. Получаем в знаменателе целое число, т. е. $37.81:1.7 = \dfrac{37.81 \times 10}{1.7 \times 10} = \dfrac{378.1}{17}$.

Деление в столбик десятичных дробей аналогично делению в столбик целых чисел, поэтому покажем только первые четыре шага:

$$
\begin{array}{r|l}
-378.100000 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{34} & 22.24117... \\
-38 & \\
\underline{34} & \\
-41 & \\
\underline{34} & \\
-70 & \\
\underline{68} & \\
20... &
\end{array}
$$

Итак, **37.81:1.7 = 22.24** с точностью до 4 значащих цифр;
37.81:1.7 = 22.2412 с точностью до 4 десятичного разряда.

Пример. Преобразовать 0.4375 в правильную дробь.

Дробь 0.4375 можно без изменения ее значения записать в виде $\frac{0.4375 \times 10000}{10000}$.

Таким образом, $0.4375 = \frac{4375}{10000}$.

Сокращая, получаем $\frac{4375}{10000} = \frac{875}{2000} = \frac{175}{400} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$.

Таким образом, $0.4375 = \mathbf{\frac{7}{6}}$.

> ***Для преобразования правильной дроби в десятичную надо разделить числитель на знаменатель.***

Пример. Выразить $\frac{9}{16}$ в виде десятичной дроби.

Деление на 16 можно осуществить в столбик, а можно просто сократить дробь на 2 (9/2 = 4.50), потом на 8 (4.50/8 = 0.5625).

Итак, $\frac{9}{16} = 0.5625$.

1.2.4. Проценты

Десятичная дробь 0.01, т. е. дробь с числом 100 в знаменателе, называется *процентом*. Проценты используются в качестве общепринятого стандарта. Например, 25 процентов означает $\frac{25}{100}$, т. е. $\frac{1}{4}$, и записывается как 25%.

Пример. Выразить в процентах 0.0125.

Десятичную дробь можно преобразовать в проценты, умножив ее на 100. Следовательно, 0.0125 соответствует 0.0125 × 100%, т. е. **1.25%**.

Пример. Выразить в процентах $\frac{5}{16}$.

Чтобы преобразовать дробь в проценты, надо преобразовать ее в десятичную, т. е. разделить числитель на знаменатель, и полученное значение умножить на 100, т. е. $\frac{5}{16} = 0.3125 \times 100\%$, или **31.25%.**

Пример. На обработку детали уходит 50 минут. При использовании инструмента нового типа время обработки уменьшается на 15%. Определить новое время обработки.

Способ 1. 15% от 50 минут $= \frac{15}{100} \times 50 = \frac{750}{100} = 7.5$ мин.

Итак, **новое время обработки** равно 50 – 7.5 = **42.5 мин**.

Способ 2. Если время сократилось на 15%, значит, новое время обработки составляет 85% от исходного, т. е. 85% от $50 = \frac{85}{100} \times 50 = \frac{750}{100} =$ **42.5 мин**. Получаем тот же результат, что и в первом способе.

Пример. Сплав нейзильбер содержит 60% меди, 25% цинка и 15% никеля. Найти массу меди, цинка и никеля, если масса слитка равна 3.74 кг.

Соотношение масс меди, цинка и никеля в слитке массой 3.74 кг определяется так. Из прямой пропорции находим:

100% — это 3.74 кг,

1% — это $\frac{3.74}{100} = 0.0374$ кг,

60% соответствует $60 \times 0.0374 = 2.244$ кг,

25% соответствует $25 \times 0.0374 = 0.935$ кг,

15% соответствует $15 \times 0.0374 = 0.561$ кг.

Итак, массы меди, цинка и никеля составляют соответственно **2.224 кг, 0.935 кг и 0.561 кг**.

Проверка. **2.244 + 0.935 + 0.561 = 3.74.**

1.3. ПОКАЗАТЕЛИ СТЕПЕНИ И НАУЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЧИСЛА

1.3.1. Показатели степени

Наименьшие делители числа 2000 — это $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. Данные делители можно записать в виде $2^4 \times 5^3$, где 2 и 5 называют *основаниями,* а 4 и 3 — *показателями степени.*

Показатели 2 и 3 имеют отдельные названия: первый называют «квадрат», второй — «куб». Таким образом, 7^2 — это «семь в квадрате», а 9^3 — это «девять в кубе». Если показатель степени не указан, значит, он равен 1, т. е. 2 — это 2^1.

1.3.2. Обратная величина

Обратная величина некоторого числа — данное число в степени -1, т. е. единица, деленная на рассматриваемое число. Таким образом, величина, обратная 2, есть 2^{-1} или $\frac{1}{2}$, или 0.5. Аналогично обратная величина 5 есть 5^{-1} или $\frac{1}{5}$, или 0.2.

1.3.3. Корень квадратный

Корень квадратный из некоторого числа — рассматриваемое число в степени $\frac{1}{2}$, т. е. корень квадратный из 2 записывается в виде $2^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{2}$. Величина квадратного корня из некоторого числа — это такая величина, которая при умножении сама на себя дает это число. Поскольку $3 \times 3 = 9$, то $\sqrt{9} = 3$. Однако $(-3) \times (-3) = 9$, т. е. $\sqrt{9} = -3$. При определении квадратного корня из числа всегда существует два ответа; это показывают, ставя перед ответом одновременно знаки + и −. Таким образом, $\sqrt{9} = \pm 3$.

1.3.4. Правила действий со степенями

При упрощении содержащих степени выражений можно использовать несколько базовых правил или законов, называемых *правилами действий со степенями*. Эти правила таковы:

1. При перемножении двух или более степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются, т. е. $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$.

2. При делении одной степени на другую с тем же основанием показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого, т. е. $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$.

3. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, т. е. $(3^5)^2 = 3^{10}$.

4. При возведении любого числа в степень с показателем 0 получается 1, т. е. $3^0 = 1$.

5. При возведении числа в степень с отрицательным целым показателем получается величина, обратная этому же числу в положительной степени. Таким образом, $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$. Аналогично $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$.

6. При возведении числа в дробную степень знаменатель этой дроби есть степень корня из числа, а числитель есть показатель степени числа. Итак,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (2)^2 = 4 \quad \text{и} \quad 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25^1} = \pm 5\,.$$

Заметим, что $\sqrt{\ } \equiv \sqrt[2]{\ }$.

Пример. Вычислить $5^2 \times 5^3$ и $3^2 \times 3^4 \times 3$.

Согласно правилу (1) имеем

$$5^2 \times 5^3 = 5^{(2+3)} = 5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{3125}$$

и

$$3^2 \times 3^4 \times 3 = 3^{(2+4+1)} = 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \mathbf{2187}.$$

Пример. Вычислить $\frac{7^5}{7^3}$ и $\frac{5^7}{5^4}$.

Согласно правилу (2) имеем

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^{(5-3)} = 7^2 = \mathbf{49}\,; \quad \frac{5^7}{5^4} = 5^{(7-4)} = 5^3 = \mathbf{125}\,.$$

Пример. Упростить $(2^3)^4$ и $(3^2)^5$.

Согласно правилу (3) имеем $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = \mathbf{2^{12}}$ и $(3^2)^5 = 3^{2\times 5} = \mathbf{3^{10}}$.

Пример. Вычислить $\frac{(10^2)^3}{10^4 \times 10^2}$.

Согласно правилам действий со степенями имеем

$$\frac{(10^2)^3}{10^4 \times 10^2} = \frac{10^{(2\times 3)}}{10^{(4+2)}} = \frac{10^6}{10^6} = 10^{6-6} = 10^0 = \mathbf{1}\,.$$

Пример. Вычислить $4^{1/2}$, $16^{3/4}$, $27^{2/3}$ и $9^{-1/2}$.

Согласно правилам действий со степенями имеем

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = \pm\mathbf{2}\,; \quad 16^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = (2)^3 = \mathbf{8}\,.$$

> ***Последовательность таких действий, как извлечение корня и возведение в куб, не имеет значения — результат получается один и тот же.***

$$27^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = (3)^2 = \mathbf{9}\,; \quad 9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\pm 3} = \pm\mathbf{\frac{1}{3}}\,.$$

Правила действий со степенями применимы только к степеням с одинаковыми основаниями.

Пример. Вычислить $\frac{3^3 \times 5^7}{5^3 \times 3^4}$.

Сгруппируем члены с одинаковыми основаниями и применим правила действий со степенями к каждой из полученных групп:

$$\frac{3^3 \times 5^7}{5^3 \times 3^4} = \frac{3^3}{3^4} \times \frac{5^7}{5^3} = 3^{(3-4)} \times 5^{(7-3)} = 3^{-1} \times 5^4 = \frac{5^4}{3^1} = \frac{625}{3} = \mathbf{208\frac{1}{3}}.$$

Пример. Вычислить $\dfrac{4^{1\,5} \times 8^{1/3}}{2^2 \times 32^{-2/5}}$.

$$4^{1\,5} = 4^{3/2} = \sqrt{4^3} = 2^3 = 8\,,\ 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2\,,$$

$$2^2 = 4,\ 32^{-2/5} = \frac{1}{32^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\dfrac{4^{1\,5} \times 8^{1/3}}{2^2 \times 32^{-2/5}} = \dfrac{8 \times 2}{4 \times \frac{1}{4}} = \dfrac{16}{1} = \mathbf{16}$, или

$$\frac{4^{1.5} \times 8^{1/3}}{2^2 \times 32^{-2/5}} = \frac{[(2)^2]^{3/2} \times (2^3)^{1/3}}{2^2 \times (2^5)^{-2/5}} =$$

$$= \frac{2^3 \times 2^1}{2^2 \times 2^{-2}} = 2^{3+1-2-(-2)} = 2^4 = \mathbf{16}.$$

1.3.5. Научная форма записи числа

Если число записано в виде произведения числа с одним знаком слева от десятичной точки на 10 в некоторой степени, говорят, что число записано в *научной форме.* Так, например, 5837 в научной форме имеет вид 5.837×10^3, а 0.0415 в научной форме имеет вид 4.15×10^{-2}.

Для числа, представленного в научной форме, первый множитель называется *мантиссой*, а второй — *порядком*. Таким образом, число 5.8×10^3 имеет мантиссу 5.8 и порядок 10^3.

Числа в научной форме с одинаковым порядком можно складывать или вычитать, складывая или вычитая их мантиссы и сохраняя неизменным порядок. Таким образом,

$$2.3 \times 10^4 + 3.7 \times 10^4 = (2.3 + 3.7) \times 10^4 = 6.0 \times 10^4\,;$$

$$5.9 \times 10^{-2} - 4.6 \times 10^{-2} = (5.9 - 4.6) \times 10^{-2} = 1.3 \times 10^{-2}\,.$$

Единственный способ сложить или вычесть числа с разными порядками — выразить одно из них в нестандартной форме так, чтобы оба числа содержали одинаковый порядок, т. е.

$$2.3 \times 10^4 + 3.7 \times 10^3 = 2.3 \times 10^4 + 0.37 \times 10^4 =$$

$$= (2.3 + 0.37) \times 10^4 = 2.67 \times 10^4\,,$$

или

$$2.3 \times 10^4 + 3.7 \times 10^3 = 23000 + 3700 = 26700 = 2.67 \times 10^4 .$$

Правила действий со степенями используются также при умножении и делении чисел в научной форме. Например:

а) $(2.5 \times 10^3) \times (5 \times 10^2) = (2.5 \times 5) \times (10^{3+2}) =$

$$= 12.5 \times 10^5 = 1.25 \times 10^6 ;$$

б) $\dfrac{5 \times 10^4}{1.5 \times 10^2} = \dfrac{6}{1.5} \times (10^{4-2}) = 4 \times 10^2 .$

Пример. Выразить в научной форме 38.71 и 0.0124.

> ***Число выражено в научной форме, если при записи слева от десятичной точки находится один знак.***

Следовательно, чтобы получить число с одним знаком слева от десятичной точки, надо число 38.71 разделить на 10 и одновременно умножить на 10 для сохранения равенства.

Итак, $38.71 = \dfrac{38.71}{10} \times 10 = \mathbf{3.871} \times \mathbf{10}$ в научной форме

и $0.0124 = 0.0124 \times \dfrac{100}{100} = \dfrac{1.24}{100} = \mathbf{1.24} \times \mathbf{10^{-2}}$ в научной форме.

Пример. Выразить в научной форме с точностью до трех значащих цифр $19\frac{2}{3}$ и $741\frac{9}{16}$.

Имеем

$19\frac{2}{3} = 19.6 = \mathbf{1.97} \times \mathbf{10}$ в научной форме с точностью до 3 значащих цифр

и $741\frac{9}{16} = 741.5625 = \mathbf{7.42} \times \mathbf{10^2}$ в научной форме с точностью до 3 значащих цифр.

Пример. Вычислить $7.9 \times 10^{-2} - 5.4 \times 10^{-2}$ и $9.293 \times 10^2 + 1.3 \times 10^3$ и выразить ответ в научной форме.

$$7.9 \times 10^{-2} - 5.4 \times 10^{-2} = (7.9 - 5.4) \times 10^{-2} = \mathbf{2.5} \times \mathbf{10^{-2}} .$$

Числа с одинаковыми порядками можно складывать, суммируя их мантиссы. Поэтому сначала надо привести числа к соответствующему виду: $9.293 \times 10^2 + 1.3 \times 10^3 = 9.293 \times 10^2 + 13 \times 10^2 = (9.293 + 13) \times 10^2 = 22.293 \times 10^2$.

В научной форме имеем $\mathbf{2.2293} \times \mathbf{10^3}$.

Числа можно также выразить в виде десятичных дробей. В итоге получаем $9.293 \times 10^2 + 1.3 \times 10^3 = 929.3 + 1300 = 2229.3$, или, в научной форме, $\mathbf{2.2293 \times 10^3}$, т. е. получаем тот же результат, что и ранее.

Такой метод решения задач подобного типа часто оказывается самым надежным.

1.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ФОРМУЛ

1.4.1. Погрешности и аппроксимации

Во всех задачах, где необходимо рассчитать расстояние, время, массу или другие количественные величины, нельзя вычислить точный ответ, можно лишь определить его с заданной степенью точности. Чтобы учесть это обстоятельство, используют понятие так называемой *погрешности измерения.*

Для учета погрешности измерения ответ, как правило, ограничивают таким образом, чтобы в результате было ***максимум на одну значащую цифру больше, чем в исходных данных***.

В десятичных дробях может возникнуть *погрешность округления.* Например, утверждать, что $\pi = 3.142$, не совсем верно; правильным будет следующее утверждение: $\pi = 3.142$ с точностью до 4 значащих цифр (в действительности $\pi = 3.14159265...$).

Некорректное выполнение действий может привести к неправильному результату вычисления. Такой результат называют ошибочным.

Если в результате вычисления неправильно расположена десятичная точка, говорят, что допущена *ошибка в порядке величины.*

Вероятность ошибок вычисления можно уменьшить путем *аппроксимации*, определив ***приблизительные результаты вычислений.*** Если ответ выглядит неправильным, его следует проверить, и при необходимости вычисление следует повторить.

Инженеру часто требуется производить в уме приблизительные расчеты. Например, $\dfrac{49.1 \times 18.4 \times 122.1}{61.2 \times 38.1}$ можно упростить до $\dfrac{50 \times 20 \times 120}{60 \times 40}$, а затем сократить. В результате получим

$$\frac{50 \times \cancel{20}^{1} \times \cancel{120}^{\cancel{2}\,1}}{{}_{1}\cancel{60} \times \cancel{40}_{\cancel{2}\,1}} = 50.$$

Следовательно, точный ответ лежит где-то в пределах 45...55. Разумеется, он не может равняться 5 или 500. Действительно, произведя вычисления с помощью калькулятора, получаем, что $\dfrac{49.1 \times 18.4 \times 122.1}{61.2 \times 38.1} = \mathbf{47.31}$ с точностью до 4 значащих цифр.

1.4.2. Калькулятор

Сегодня карманный электронный *калькулятор* — наиболее современное подспорье для проведения вычислений. С его помощью можно быстро выполнять вычисления с точностью до 9 значащих цифр. Появление инженерного калькулятора сделало почти ненужными таблицы и логарифмы. Чтобы убедиться, хорошо ли вы управляетесь с калькулятором, проверьте ответы к следующим вычислениям:

$21.93 \times 0.012981 = 0.2846733... = \mathbf{0.2847}$ с точностью до 4 значащих цифр.

$\frac{1}{0.0275} = 36.3636363\ldots = \mathbf{36.364}$ с точностью до 3 знака после десятичной точки.

$46.27^2 - 31.79^2 = 1130.3088 = \mathbf{1.130} \times \mathbf{10^3}$ с точностью до 4 значащих цифр.

$\sqrt{5.462} = 2.3370922\ldots = \mathbf{2.337}$ с точностью до 4 значащих цифр.

$\sqrt{0.007328} = 0.08560373 = \mathbf{0.086}$ с точностью до 3 знака после десятичной точки.

$4.72^3 = 105.15404\ldots = \mathbf{105.2}$ с точностью до 4 значащих цифр.

$\sqrt[3]{47.291} = 3.61625876\ldots = \mathbf{3.62}$ с точностью до 3 значащих цифр.

1.4.3. Таблицы преобразований и диаграммы

Довольно часто вычисления приходится выполнять с помощью различных таблиц преобразований и диаграмм. Это относится, например, к курсам иностранных валют, переводу британских единиц измерения в метрические, производственным графикам и так далее.

Пример. В **Табл. 1.1** показан перевод некоторых величин из британской системы единиц в метрическую.

Таблица 1.1

Длина	1 дюйм = 2.54 см 1 миля = 1.61 км
Масса	2.2 фунта = 1 кг (1 фунт = 16 унций)
Объем	1.76 пинты = 1 литр (8 пинт = 1 галлон)

$$9.5 \text{ дюйма} = 9.5 \times 2.54 \text{ см} = \mathbf{24.13\ см},$$

$$24.13 \text{ см} = 24.13 \times 10 \text{ мм} = \mathbf{241.3\ мм},$$

$$50 \text{ миль/ч} = 50 \times 1.61 \text{ км/ч} = \mathbf{80.5\ км/ч},$$

$$300 \text{ км} = \frac{300}{1.61} \text{ миль} = \mathbf{186.3\ мили},$$

$$30 \text{ фунтов} = \frac{30}{2.2} \text{ кг} = \mathbf{13.64\ кг},$$

$$42 \text{ кг} = 42 \times 2.2 \text{ фунта} = 92.4 \text{ фунта},$$

0.4 фунта = 0.4 × 16 унций = 6.4 унции = 6 унций с точностью до унции.

Таким образом, 42 кг = **92 фунта 6 унций** с точностью до унции.

$$15 \text{ галлонов} = 15 \times 8 \text{ пинт} = 120 \text{ пинт},$$

$$120 \text{ пинт} = \frac{120}{1.76} = \mathbf{68.18\ литра},$$

$$40 \text{ литров} = 40 \times 1.76 \text{ пинт} = 70.4 \text{ пинты},$$

$$70.4 \text{ пинты} = \frac{70.4}{8} \text{ галлонов} = \mathbf{8.8\ галлона}.$$

1.4.4. Вычисления формул

Говорят, что выражение вида $\upsilon = u + at$ есть *формула* для υ, выраженного через u, a и t, где υ, u, a и t — *обозначения переменных.*

Единственная величина в левой части выражения, υ, называется *искомой величиной.*

Если заданы численные значения всех переменных формулы, кроме одной, эта переменная становится *искомой величиной* и может быть вычислена с помощью калькулятора.

Пример. Пусть скорость υ задана в виде $\upsilon = u + at$. Определить υ с точностью до 3 значащих цифр при u = 9.86 м/с, a = 4.25 м/с^2, t = 6.84 с:

$$\upsilon = u + at = 9.86 + (4.25)(6.84) = 9.86 + 29.07 = 38.93.$$

Следовательно, скорость υ = **38.9 м/с** с точностью до 3 значащих цифр.

Пример. Объем прямого кругового конуса V см^3 задается формулой $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Определить объем с точностью до 4 значащих цифр, если r = 4.321 см, а h = 18.35 см:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4.321)^2(18.35) = \frac{1}{3}\pi(18.671041)(18.35).$$

Следовательно, объем V = **358.8 см^3** с точностью до 4 значащих цифр.

Пример. Сила Ньютона F задается формулой $F = \dfrac{Gm_1m_2}{d^2}$, где m_1 и m_2 — массы, d — расстояние между ними, G — константа. Определить величину силы, если $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $m_1 = 7.36$, $m_2 = 15.5$, $d = 22.6$, и выразить ответ в научной форме с точностью до 3 значащих цифр.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(7.36)(15.5)}{(22.6)^2} =$$

$$= \frac{(6.67)(7.36)(15.5)}{(10^{11})(510.76)} = \frac{1.490}{10^{11}}.$$

Следовательно, сила $\boldsymbol{F = 1.49 \times 10^{-11}}$ **Н** с точностью до 3 значащих цифр.

1.5. АЛГЕБРА

1.5.1. Основные действия

Алгебра — раздел математики, в котором с помощью абстрактных символов выражаются отношения и свойства чисел. Например, площадь прямоугольника определяется как произведение длины на ширину. Алгебраически это выражается как $A = l \times b$, где A — площадь прямоугольника, l — его длина, b — его ширина.

В алгебре обобщены основные законы арифметики. Пусть a, b, c и d есть некоторые четыре числа. Тогда:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2. $a(bc) = (ab)c$;
3. $a + b = b + a$;
4. $ab = ba$;
5. $a(b + c) = ab + ac$;
6. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$;
7. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Пример. Вычислить $4p^2qr^3$, если $p = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$ и $r = 1\dfrac{1}{2}$.

Подставляя числовые значения p, q и r, получаем

$$4p^2qr^3 = 4(2)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \mathbf{27}.$$

Пример. Вычислить сумму слагаемых $5a - 2b$, $2a + c$, $4b - 5d$ и $b - a + 3d - 4c$.

Алгебраически выражения можно записать в следующем виде:

	$+5a$	$-2b$		
	$+2a$		$+c$	
		$+4b$		$-5d$
	$-a$	$+b$	$-4c$	$+3d$
Суммируем:	$6a$	$+3b$	$-3c$	$-2d$

Пример. Умножить $2a + 3b$ на $a + b$.

Каждый член первого выражения умножается на a, затем каждый член первого выражения умножается на b и два результата суммируются, т. е.

	$2a$	$+3b$	
	a	$+b$	
Умножаем на a →	$2a^2$	$+3ab$	
Умножаем на b →		$+2ab$	$+3b^2$
Суммируем:	$\mathbf{2a^2}$	$\mathbf{+5ab}$	$\mathbf{+3b^2}$

Пример. Упростить $2p : 8pq$.

$2p : 8pq$ – это $\frac{2p}{8pq}$. Данную дробь можно упростить, сократив числитель и знаменатель:

$$\frac{2p}{8pq} = \frac{\cancel{2}^1 \times \cancel{p}^1}{{}_4\cancel{8} \times {}_1\cancel{p} \times q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4q}}.$$

1.5.2. Правила действий со степенями

Правила действий со степенями алгебраически выражаются так:

$$1.\ a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad 2.\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad 3.\ (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4.\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad 5.\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad 6.\ a^0 = 1.$$

Пример. Упростить $a^3b^2c \times ab^3c^5$.

Разложим выражение на множители, т. е. $a^3 \times a \times b^2 \times b^3 \times c \times c^5$, и сгруппируем множители с одинаковым основанием, используя первое правило действий со степенями: $a^{3+1} \times b^{2+3} \times c^{1+5}$.

В результате получаем $a^4 \times b^5 \times c^6 = \mathbf{a^4b^5c^6}$.

Пример. Упростить $\dfrac{a^3b^2c^4}{abc^{-2}}$ и вычислить это выражение при $a = 3$, $b = \dfrac{1}{8}$, $c = 2$.

Используя второе правило действий со степенями, найдем: $\dfrac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$, $\dfrac{b^2}{b} = b^{2-1} = b$ и $\dfrac{c^4}{c^{-2}} = c^{4-(-2)} = c^6$.

Итак, $\dfrac{a^3b^2c^4}{abc^{-2}} = \boldsymbol{a^2bc^6}$.

При $a = 3$, $b = \dfrac{1}{8}$ и $c = 2$, $a^2bc^6 = (3)^2\left(\dfrac{1}{8}\right)(2)^6 =$

$$= (9)\left(\frac{1}{8}\right)(64) = \mathbf{72}.$$

Пример. Упростить $\dfrac{x^2y^3 + xy^2}{xy}$.

Алгебраически выражение вида $\dfrac{a+b}{c}$ можно выразить как $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$. Тогда

$$\frac{x^2y^3 + xy^2}{xy} = \frac{x^2y^3}{xy} + \frac{xy^2}{xy} = x^{2-1}y^{3-1} + x^{1-1}y^{2-1} = \boldsymbol{xy^2 + y}$$

(поскольку, согласно шестому правилу действий со степенями, $x^0 = 1$).

Пример. Упростить $\dfrac{(mn^2)^3}{(m^{1/2}n^{1/4})^4}$.

Скобки указывают на то, что каждый сомножитель в скобках надо возвести в степень за скобками.

Используя третье правило действий со степенями, получаем

$$\frac{(mn^2)^3}{(m^{1/2}n^{1/4})^4} = \frac{m^{1\times 3}n^{2\times 3}}{m^{(1/2)\times 4}n^{(1/4)\times 4}} = \frac{m^3n^6}{m^2n^1}.$$

Согласно второму правилу действий со степенями имеем

$$\frac{m^3n^6}{m^2n^1} = m^{3-2}n^{6-1} = \boldsymbol{mn^5}.$$

1.5.3. Вынесение общего множителя за скобки

Если два или более члена алгебраического выражения содержат одинаковый множитель, этот множитель можно ***вынести за скобки.*** Например, $ab + ac = a(b + c)$.

Этот закон — обратный пятому основному закону алгебры:

$$6px + 2py - 4pz = 2p(3x + y - 2z).$$

Это действие называется ***вынесением общего множителя за скобки***. Результатом его последовательного применения будет *разложение алгебраического выражения на множители.*

Пример. Раскрыть скобки и упростить выражение

$$2a - [3\{2(4a - b) - 5\,(a + 2b)\} + 4a].$$

Сначала раскроем внутренние скобки:

$$2a - [3\{8a - 2b - 5a - 10b\} + 4a].$$

Приведем подобные члены, получив $2a - [3\{3a - 12b\} + 4a]$, и раскроем следующие внутренние скобки: $2a - [9a - 36b + 4a]$. Затем приведем подобные члены, получив $2a - [13a - 36b]$, и раскроем внешние скобки: $2a - 13a - 36b$.

Итак, получаем $\mathbf{-11a + 36b}$, или $\mathbf{36b - 11a}$, согласно третьему закону алгебры.

Пример. Разложить на множители следующие выражения: $xy - 3xz$, $4a^2 + 16ab^3$, $3a^2b - 6ab^2 + 15ab$.

В каждом выражении одним из сомножителей будет наибольший общий делитель его членов. Следовательно,

$$xy - 3xz = \mathbf{x(y - 3z)};$$
$$4a^2 + 16ab^3 = \mathbf{4a(a + 4b^3)};$$
$$3a^2b - 6ab^2 + 15ab = \mathbf{3ab(a - 2b + 5)}.$$

Пример. Разложить на множители выражение $ax - ay + bx - by$.

Первые два члена содержат общий множитель a; последние два члена содержат общий множитель b. В итоге получаем

$$ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y),$$

где оба члена содержат общий множитель $(x - y)$. Таким образом, $a(x - y) + b(x - y) = \mathbf{(x - y)(a + b)}$.

1.5.4. Основные правила и последовательность выполнения действий

Арифметические ***правила о порядке выполнения действий над числами*** применимы и для алгебраических выражений. Последовательность действий такова: раскрытие скобок, деление, умножение, сложение, вычитание.

Пример. Упростить $2a + 5a \times 3a - a$.

Сначала выполняется умножение, затем сложение и вычитание. Таким образом,

$$2a + 5a \times 3a - a = 2a + 15a^2 - a = a + 15a^2 = \boldsymbol{a(1 + 15a)}.$$

Пример. Упростить $a \div 5a + 2a - 3a$.

Поочередно выполняем: сначала деление, затем сложение и вычитание. Таким образом,

$$a \div 5a + 2a - 3a = \frac{a}{5a} + 2a - 3a = \frac{1}{5} + 2a - 3a = \boldsymbol{\frac{1}{5} - a}.$$

Пример. Упростить выражение $3c + 2c \times 4c + c \div 5c - 8c$.

Порядок выполнения операций: деление, умножение, сложение и вычитание. Итак,

$$3c + 2c \times 4c + c \div 5c - 8c = 3c + 2c \times 4c + \frac{c}{5c} - 8c =$$

$$= 3c + 8c^2 + \frac{1}{5} - 8c = \boldsymbol{8c^2 - 5c + \frac{1}{5}} = \boldsymbol{c(8c - 5) + \frac{1}{5}}.$$

1.5.5. Прямая и обратная пропорциональность

Выражение вида $y = 3x$ содержит две переменных. Для каждого значения x существует соответствующее значение y. Переменная x называется *независимой*, y – *зависимой*.

Если при увеличении или уменьшении независимой переменной зависимая переменная также увеличивается или уменьшается во столько же раз, говорят, что имеет место *прямая пропорциональность*. Если $y = 3x$, значит, y прямо пропорционально x. Это можно записать в виде $y \propto x$ или $y = kx$, где k называется *коэффициентом пропорциональности* (в данном случае $k = 3$).

Если увеличение независимой переменной ведет к уменьшению зависимой переменной во столько же раз (и наоборот), говорят, что имеет место *обратная пропорциональность*. Если y обратно пропорционально x, то $y \propto (1/x)$ или $y = k/x$. Эту зависимость можно также выразить формулой $k = xy$, т. е. произведение обратно пропорциональных переменных является постоянной величиной.

Законы, основанные на прямой и обратной пропорциональности:

1. *Закон Гука* выражает линейную зависимость между напряжениями и малыми деформациями в упругой среде. При растяжении стержня длиной l и площадью S удлинение стержня l пропорционально растягивающей силе F. Закон Гука можно представить в виде $\varepsilon \propto \sigma$, где $\sigma = F/S$ — нормальное напряжение в поперечном сечении, ε — относительное удлинение стержня.

2. *Закон Гей-Люссака* — для газа данной массы при неизменном давлении (p = const) отношение объема к температуре постоянно, т. е. $V_1/T_1 = V_2/T_2$.

3. *Закон Ома* — сила тока прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению участка цепи, т. е. $I \propto V$ или $I = kV$.

4. *Закон Бойля – Мариотта* — для газа данной массы при неизменной температуре (T = const) произведение давления на его объем постоянно, т. е. $p_1V_1 = p_2V_2$.

1.5.6. Деление многочленов

Многочлен — выражение вида $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$. Иногда при выделении простейших дробей требуется выполнить *деление многочленов.*

Пример. Разделить $2x^2 + x - 3$ на $x - 1$.

$2x^2 + x - 3$ – *делимое*, $x - 1$ — *делитель.* Схема деления такова:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2 - 2x\phantom{{}-3}} & 2x + 3 \\ 3x - 3 & \\ \underline{3x - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

при этом члены делимого и делителя расположены в порядке убывания показателей степени.

При делении первого члена делимого на первый член делителя, т. е. $2x^2/x$, получаем $2x$, и записываем этот результат в ответ, как показано выше. Затем делитель умножаем на $2x$, т. е. $2x(x - 1) = 2x^2 - 2x$, и полученный результат записываем под делимым. Вычитание дает $3x - 3$. Далее процесс повторяется, т. е. $3x$ делится на первый член делителя x, получаем $+3$, и результат также записываем в ответ. Затем умножаем 3 на $(x - 1)$ и полученный результат записываем под $3x - 3$. Остаток при делении равен нулю, значит, вычисление завершено.

Итак, $\mathbf{(2x^2 + x - 3) \div (x - 1) = (2x + 3)}$.

Проверка. Умножая $(2x + 3)$ на $(x - 1)$, получаем $2x^2 + x - 3$.

Пример. Разделить $(x^2 + 3x - 2)$ на $(x - 2)$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 - 2x\phantom{{}-2}} & x + 5 \\ 5x - 2 & \\ \underline{5x - 10} & \\ 8 & \end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^2 + 3x - 2}{x - 2} = \mathbf{x + 5 + \dfrac{8}{x - 2}}$.

1.5.7. Теорема о делении многочлена

Существует простое соотношение между сомножителями квадратичного выражения и корнями уравнения, полученного при приравнивании этого выражения нулю.

Рассмотрим, например, квадратное уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$. Чтобы его решить, можно разложить квадратичный многочлен $x^2 + 2x - 8$ на множители, т. е. $(x - 2)(x + 4)$.

Следовательно, $(x - 2)(x + 4) = 0$.

Если произведение двух чисел равно нулю, значит, одно или оба этих числа равняются нулю. Следовательно, либо $(x - 2) = 0$, т. е. $x = 2$, либо $(x + 4) = 0$, т. е. $x = -4$.

Очевидно, что множитель $(x - 2)$ дает корень $+2$, а множитель $(x + 4)$ дает корень -4. Следовательно, можно заявить, что

Множитель $(x - a)$ соответствует корню $x = a$.

На практике корни простого квадратного уравнения всегда определяют по множителям квадратичного выражения, как в приведенном выше примере. Однако этот же процесс можно использовать иначе: если методом проб и ошибок найти, что $x = 2$ есть корень уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$, можно сразу определить, что $(x - 2)$ есть множитель для выражения $x^2 + 2x - 8$. Этот метод обычно не используется при решении квадратных уравнений. Теперь представим, что речь идет о разложении на множители кубического уравнения, т. е. уравнения, у которого максимальная степень членов равна 3. Кубическое уравнение может содержать три простых линейных множителя, и найти их методом проб и ошибок непросто. В подобном случае применяется так называемая *теорема о делении многочлена*, которая является лишь обобщением только что рассмотренного частного случая квадратного уравнения.

Теорема о делении многочлена дает метод разложения на множители любого многочлена $f(x)$, содержащего простые множители.

Теорема о делении многочлена гласит:

> **Если $x = a$ — корень уравнения $f(x) = 0$, тогда $(x - a)$ — множитель $f(x)$.**

Пример. Разложить на множители $x^3 - 7x - 6$ и использовать полученный результат для решения кубического уравнения $x^3 - 7x - 6 = 0$.

Пусть $f(x) = x^3 - 7x - 6$.

Если $x = 1$, то $f(1) = 1^3 - 7(1) - 6 = -12$.

Если $x = 2$, то $f(2) = 2^3 - 7(2) - 6 = -12$.

Если $x = 3$, то $f(1) = 3^3 - 7(3) - 6 = 0$.

Если $f(3) = 0$, тогда, согласно теореме о делении многочлена, $(x - 3)$ есть множитель.

Теперь можно либо разделить $x^3 - 7x - 6$ на $(x - 3)$, либо продолжать использовать метод проб и ошибок, подставляя другие значения x в данное уравнение в надежде получить $f(x) = 0$. Сделаем и то, и другое.

Способ 1. Сначала делим

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0 - 7x - 6 & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 3x^2} \qquad\qquad & x^2 + 3x + 2 \\ 3x^2 - 7x - 6 & \\ \underline{3x^2 - 9x} \quad\;\; & \\ 2x - 6 & \\ \underline{2x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

и получаем $\dfrac{x^3 - 7x - 6}{x - 3} = x^2 + 3x + 2$.

Откуда $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$.

Разложив «на глазок» $x^2 + 3x + 2$, имеем $(x + 1)(x + 2)$.

Следовательно, $\boldsymbol{x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)}$.

Способ 2. Продолжим подставлять различные значения x в $f(x)$.

Выражение для $f(3)$ имело вид $3^3 - 7(3) - 6 = 0$. Можно заметить, что при подстановке еще больших положительных значений x будет доминировать первый член, так что $f(x)$ не будет равняться нулю. Поэтому попробуем подставить несколько отрицательных значений x, т. е. $f(-1) = (-1)^3 - (7)(-1) - 6 = 0$. Следовательно, $(x + 1)$ есть множитель (как показано выше). Аналогично $f(-2) = (-2)^3 - (7)(-2) - 6 = 0$, и, следовательно, $(x + 2)$ есть множитель (как показано выше).

Чтобы решить уравнение $x^3 - 7x - 6 = 0$, разложим его на множители:

$$(x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0.$$

Откуда следует, что $\boldsymbol{x = 3, x = -1, x = -2}$. Заметим, что все эти значения x, т. е. 3, -1 и -2, — множители постоянного члена, равного 6. Таким образом, становится очевидным, какие значения x следует рассматривать.

1.5.8. Теорема об остатке

Деление в столбик квадратичного выражения $(ax^2 + bx + c)$ на $(x - p)$, где p — любое целое число, дает

$$\begin{array}{l|l}
ax^2 + bx \qquad + c & x - p \\ \cline{2-2}
\underline{ax^2 - apx} & ax + (b + ap) \\
\quad (b + ap)x + c & \\
\quad \underline{(b + ap)x - (b + ap)p} & \\
\qquad\qquad c + (b + ap)p &
\end{array}$$

Остаток $c + (b + ap)p = c + bp + ap^2$ или $ap^2 + bp + c$.

Теорема об остатке формулируется так:

> **Если $(ax^2 + bx + c)$ разделить на $(x - p)$, то остаток равен $ap^2 + bp + c$.**

Пример. Если $(3x^2 - 4x + 5)$ разделить на $(x - 2)$, остаток будет равен $ap^2 + bp + c$ (где $a = 3$, $b = -4$, $c = 5$ и $p = 2$), т. е. остаток равен $3(2)^2 + (-4)(2) + 5 = 12 - 8 + 5 = \mathbf{9}$.

Проверка. Делим в столбик $(3x^2 - 4x + 5)$ на $(x - 2)$ и получаем

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 - 4x + 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^2 - 6x} \quad & 3x + 2 \\
2x + 5 & \\
\underline{2x - 4} & \\
9 &
\end{array}$$

Аналогично при делении $(x^2 - 3x - 2)$ на $(x - 1)$ остаток будет равен $1(1)^2 + (3)(1) - 2 = \mathbf{2}$.

Само по себе знание остатка алгебраического деления многочленов ничего не дает. Однако, если остаток равняется нулю, тогда $(x - p)$ есть множитель. Данное свойство очень полезно при разложении выражений на множители.

Для *кубического уравнения теорема об остатке* может быть сформулирована в следующем виде:

> **Если $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ разделить на $(x - p)$, то остаток равен $ap^3 + bp^2 + cp + d$.**

Как и ранее, остаток можно найти, заменяя в делимом p на x.

Пример. При делении $(3x^3 + 2x^2 - x + 4)$ на $(x - 1)$ остаток равен $ap^3 + bp^2 + cp + d$ (где $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 4$ и $p = 1$). Следовательно, остаток составит

$$3(1)^3 + 2(1)^2 + (-1)(1) + 4 = 3 + 2 - 1 + 4 = \mathbf{8}.$$

Аналогично при делении $(x^3 - 7x - 6)$ на $(x - 3)$ остаток равен $1(3)^3 + 0(3)^2 + 7(3) - 6 = 0$. Это значит, что $(x - 3)$ есть множитель для $(x^3 - 7x - 6)$.

1.5.9. Непрерывные дроби

Любая дробь может быть выражена в форме, представленной ниже на примере дроби $\frac{26}{55}$:

$$\frac{26}{55} = \frac{1}{\frac{55}{26}} = \frac{1}{2+\frac{3}{26}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{26}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Результат можно записать в виде

$$\cfrac{1}{A+\cfrac{\alpha}{B+\cfrac{\beta}{C+\cfrac{\gamma}{D+\delta}}}}$$

Сравнение показывает, что A, B, C и D равны соответственно 2, 8, 1 и 2. Дробь, записанная в такой общей форме, называется *непрерывной дробью,* а целые A, B, C и D называют *неполными частными непрерывной дроби*. Можно использовать неполные частные для получения все более точных аппроксимаций, называемых *сходящимися.*

Для определения сходящихся аппроксимаций используется ***табличный метод***:

	1	2	3	4	5
a		2	8	1	2
$b\begin{cases} bp \\ bq \end{cases}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{26}{55}$

Коэффициенты 2, 8, 1 и 2 записаны в ячейках $a2$, $a3$, $a4$ и $a5$, ячейка $a1$ – пустая.

Дробь $\frac{0}{1}$ всегда записывается в ячейке $b1$.

Величина, обратная коэффициенту в ячейке $a2$, всегда записывается в ячейке $b2$; в данном случае это $\frac{1}{2}$.

Дробь в ячейке $b3$ задается как $\frac{(a3 \times b2p) + b1p}{(a3 \times b2q) + b1q}$.

Значит, $\frac{(8 \times 1) + 0}{(8 \times 2) + 1} = \frac{8}{17}$.

Дробь в ячейке $b4$ задается как $\frac{(a4 \times b3p) + b2p}{(a4 \times b3q) + b2q}$.

Значит, $\frac{(1 \times 8) + 1}{(1 \times 17) + 1} = \frac{9}{19}$ и так далее.

Следовательно, сходящиеся аппроксимации для $\frac{26}{55}$ — это $\frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \frac{9}{19}$ и $\frac{26}{55}$, каждая следующая величина все ближе к $\frac{26}{55}$.

Подобные аппроксимации дробей применяют при определении практических передаточных отношений для зубчатых колес или делительных головок, используемых для задания определенного углового смещения.

1.6. ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.6.1. Выражения, уравнения и тождества

Примером *алгебраического выражения* является, например, выражение $(3x - 5)$, а примером *уравнения* является, например, *выражение* $3x - 5 = 1$, так как оно содержит знак равенства.

Уравнение в широком смысле — это просто утверждение равенства двух величин. Например, 1 м = 1000 мм или $F = \frac{9}{5}C + 32$, или $y = mx + c$.

Различают два типа уравнений: собственно уравнения и тождества.

Тождество — отношение, которое верно для всех значений неизвестных переменных, в то время как собственно уравнение верно только при определенных значениях переменных. Например, $3x - 5 = 1$ есть уравнение, поскольку оно верно только при $x = 2$, а $3x \equiv 8x - 5x$ есть тождество, поскольку оно верно для всех значений x (знак «$\equiv$» означает *тождественно*).

Простое линейное уравнение, или уравнение первой степени, — уравнение, в котором неизвестная величина имеет показатель степени 1.

Решить уравнение — значит найти неизвестную величину.

К уравнению может быть применено любое арифметическое действие, если при этом в уравнении ***сохраняется равенство.***

Пример. Решить уравнение $4x = 20$.

Делим каждую часть уравнения на 4 получаем $\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$.

Заметим, что одна и та же математическая операция была применена и к левой (ЛЧ), и к правой (ПЧ) частям уравнения, так что равенство осталось в силе.

Пример. *Решить уравнение* $\frac{2x}{5} = 6$.

Чтобы избавиться от дроби, которая находится в левой части уравнения, умножаем обе части уравнения на 5. Получим

$5\left(\frac{2x}{5}\right) = 5(6)$.

Сокращая, получаем $2x = 30$. Затем делим обе части уравнения на 2 и получаем $\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$, откуда имеем $x = \mathbf{15}$.

Пример. Решить уравнение $a - 5 = 8$.

Добавляя 5 к обеим частям уравнения, получаем

$$a - 5 + 5 = 8 + 5.$$

Следовательно, $\boldsymbol{a} = \mathbf{13}$.

В результате выполненного действия число 5 переносится из левой части уравнения в правую, и при этом знак при числе 5 меняется на противоположный, т. е. на +.

Пример. Решить уравнение $6x + 1 = 2x + 9$.

В подобных уравнениях содержащие x члены группируют в одной из частей уравнения. Поскольку переносу из одной части уравнения в другую должна сопутствовать перемена знака, уравнение $6x + 1 = 2x + 9$ принимает вид $6x - 2x = 9 - 1$. Откуда $4x = 8$ или $\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$. Следовательно, $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$.

Пример. Решить уравнение $4(2r - 3) - 2(r - 4) = 3(r - 3) - 1$.

Раскрываем скобки: $8r - 12 - 2r + 8 = 3r - 9 - 1$ и группируем члены следующим образом: $8r - 2r - 3r = -9 - 1 + 12 - 8$.

Итак, $3r = -6$, откуда $r = \frac{-6}{3} = \mathbf{-2}$.

Заметим, что, если в каждой части уравнения содержится только одна дробь, можно применить перекрестное умножение. Так, например, если $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$, то $(3)(5) = 4x$, откуда $\boldsymbol{x} = \mathbf{\frac{15}{4}}$ **или** $\mathbf{3\frac{3}{4}}$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x} = 2$.

Уравнение $\sqrt{x} = 2$ — это не «простое уравнение», поскольку x имеет степень $\frac{1}{2}$, т. е. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Тем не менее этот пример заслуживает того, чтобы его здесь рассмотреть, поскольку часто встречается на практике.

Если неизвестная величина стоит под знаком квадратного корня, то обе части уравнения следует возвести в квадрат:

$$(\sqrt{x})^2 = (2)^2\text{, т. е. } \boldsymbol{x = 4}.$$

Пример. Решить уравнение $\left(\dfrac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}}\right) = 2$.

Чтобы избавиться от дроби, умножаем обе части уравнения на $\sqrt{b}$. Получаем $\sqrt{b}\left(\dfrac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{b}(2)$. Затем сокращаем, $\sqrt{b}+3 = 2\sqrt{b}$, и группируем члены следующим образом:

$$3 = 2\sqrt{b}-\sqrt{b} = \sqrt{b}.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат и получаем $\boldsymbol{b = 9}$.

Пример. Решить уравнение $x^2 = 25$.

Уравнение содержит квадратичный член, и, значит, это не простое уравнение (в действительности это квадратное уравнение). Однако подобные уравнения приходится решать довольно часто, поэтому пример приводится здесь.

Если в уравнении содержится квадрат неизвестной величины, из обеих частей уравнения извлекают квадратный корень.

В результате получаем $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$. Следовательно, $x = 5$.

Однако $x = -5$ тоже есть решение данного уравнения, поскольку $(-5) \times (-5) = +25$.

Следовательно, при извлечении квадратного корня из числа всегда существует два ответа: один — положительный, второй — отрицательный.

Таким образом, решение для $x^2 = 25$ записывается в виде $\boldsymbol{x = \pm 5}$.

1.6.2. Практические задачи с использованием простых уравнений

Пример. Медный провод имеет длину $l = 1.5$ км, сопротивление $R = 5$ Ом и удельное сопротивление $\rho = 17.2 \times 10^{-6}$ Ом·мм. Найти площадь поперечного сечения провода a, если $R = \rho l/a$.

Поскольку $R = \rho l/a$, значит,

$$5\text{ Ом} = \frac{(17.2 \times 10^{-6}\text{Ом·мм})(1500 \times 10^{3}\text{мм})}{a}.$$

Исходя из заданных единиц определяем, что a измеряется в мм^2. Итак,

$$5a = 17.2 \times 10^{-6} \times 1500 \times 10^3$$

и

$$a = \frac{17.2 \times 10^{-6} \times 1500 \times 10^3}{5} =$$

$$= \frac{17.2 \times 1500 \times 10^3}{10^6 \times 5} = \frac{17.2 \times 15}{10 \times 5} = \mathbf{5.16}\,.$$

Следовательно, площадь поперечного сечения провода составляет **5.16 мм^2**.

Пример. Температурный коэффициент сопротивления α может быть вычислен по формуле $R_t = R_0(1 + \alpha t)$. Определить α, если $R_t = 0.928$, $R_0 = 0.8$, $t = 40$.

Поскольку $R_t = R_0(1 + \alpha t)$, то $0.928 = 0.8\,[1 + \alpha(40)]$,

$$0.928 = 0.8 + (0.8)\alpha(40),$$
$$0.928 - 0.8 = 32\alpha,$$
$$0.128 = 32\alpha.$$

Итак, $\alpha = \dfrac{\mathbf{0.128}}{\mathbf{32}} = \mathbf{0.004}$.

Пример. Расстояние s в метрах, пройденное за время t секунд, задается формулой $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, где u – начальная скорость в м/с, a – ускорение в м/с^2. Определить ускорение тела, прошедшего 168 м за 6 с при начальной скорости 10 м/с. Итак, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ и $s = 168$, $u = 10$, $t = 6$. Следовательно,

$$168 = (10)(6) + \frac{1}{2}a(6)^2,$$
$$168 = 60 + 18a,$$
$$168 - 60 = 18a,$$
$$108 = 18a,$$
$$a = \frac{108}{18} = 6\,.$$

Итак, ускорение тела составляет **6 м/с^2**.

Пример. Растяжение алюминиевого стержня x м длиной l м с поперечным сечением A м^2, испытывающего нагрузку F Н, определяется модулем упругости $E = Fl/Ax$. Определить растяжение алюминиевого стержня (в мм) при условии, что $E = 70 \times 10^9$ Н/м^2, $F = 20 \times 10^6$ Н, $A = 0.1$ м^2 и $l = 1.4$ м.

Поскольку $E = Fl/Ax$, значит,

$$70 \times 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{(20 \times 10^6 \text{Н})(1.4\text{м})}{(0.1\ \text{м}^2)(x)}.$$

(Таким образом, x измеряется в метрах.)

$$70 \times 10^9 \times 0.1 \times x = 20 \times 10^6 \times 1.4,$$

$$x = \frac{20 \times 10^6 \times 1.4}{70 \times 10^9 \times 0.1}.$$

Сокращая, получаем $x = \dfrac{2 \times 1.4}{7 \times 100}\ \text{м} = \dfrac{2 \times 1.4}{7 \times 100} \times 1000\ \text{мм}$.

Следовательно, растяжение алюминиевого стержня x = **4 мм**.

1.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1.7.1. Введение в теорию систем уравнений

Для нахождения ***одной неизвестной величины*** достаточно одного уравнения (как в случае простых уравнений из главы 6). Однако, если уравнение содержит ***две неизвестные величины***, оно имеет бесконечное множество решений. Если имеются два уравнения, объединяющие две неизвестные величины, существует единственное решение. Аналогично для нахождения значений трех неизвестных величин необходимо иметь систему из трех уравнений и так далее.

Уравнения, которые должны быть совместно решены для определения единственной совокупности значений неизвестных величин, удовлетворяющей каждое из уравнений, называют *системой уравнений*.

Систему уравнений с двумя неизвестными можно решить *методом подстановки* или *методом алгебраического сложения*.

(Графический метод решения систем уравнений с двумя неизвестными рассматривается в разд. 4.4, а метод матриц и детерминантов — в разд. 7.2.)

Пример. Решить систему уравнений

$$x + 2y = -1, \qquad (1)$$

$$4x - 3y = 18 \qquad (2)$$

подстановкой и алгебраическим сложением.

Подстановка: из уравнения (1) находим, что $x = -1 - 2y$. Подставляя это выражение для x в уравнение (2), получаем $4(-1 - 2y) - 3y = 18$. Теперь это простое уравнение относительно y. Раскрываем скобки:

$$-4 - 8y - 3y = 18,$$
$$-11y = 18 + 4 = 22,$$
$$y = \frac{22}{-11} = -2$$

и, подставляя $y = -2$ в уравнение (1), получаем

$$x + 2(-2) = -1,$$
$$x - 4 = -1,$$
$$x = -1 + 4 = 3.$$

Итак, для данной системы уравнений $\mathbf{x = 3, y = -2}$.

Алгебраическое сложение:

$$x + 2y = -1, \qquad (1)$$
$$4x - 3y = 18. \qquad (2)$$

Если уравнение (1) умножить на 4, коэффициент при x будет такой же, как в уравнении (2), т. е.

$$4x + 8y = -4. \qquad (3)$$

Вычитая уравнение (1) из уравнения (2), получаем

$$-\begin{array}{r} 4x - 3y = 18 \\ 4x + 8y = -4 \\ \hline 0 - 11y = 22 \end{array}$$

Следовательно, $y = \frac{22}{-11} = \mathbf{-2}$.

(Заметим, что в проведенном вычитании $18 - (-4) = 18 + 4 = 22$.)

При подстановке в уравнение (1) или (2) $y = -2$ получаем $x = 3$, как и по методу подстановки. Решение $\mathbf{x = 3, y = -2}$ есть единственная пара величин, удовлетворяющих обоим начальным уравнениям.

Пример. Решить систему уравнений

$$7x - 2y = 26, \qquad (1)$$
$$6x + 5y = 29. \qquad (2)$$

При умножении уравнения (1) на 5 и уравнения (2) на 2 коэффициенты при y становятся численно одинаковыми (10), но имеют противоположные знаки.

5 × уравнение (1) дает:	$35x - 10y = 130$	(3)
2 × уравнение (2) дает:	$12x + 10y = 58$	(4)
Сложение уравнений (3) и (4) дает:	$47x + 0 = 188$	

Следовательно, $x = \frac{188}{47} = 4$.

(Заметим, что, если знаки общих коэффициентов ***различны,*** уравнения ***складывают,*** если знаки ***одинаковы,*** уравнения ***вычитают*** одно из другого.)

Подставляя $x = 4$ в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} 7(4) - 2y &= 26,\\ 28 - 2y &= 26,\\ 28 - 26 &= 2y,\\ 2 &= 2y,\\ y &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Итак, решение системы уравнений — это $\boldsymbol{x = 4}$, $\boldsymbol{y = 1}$, поскольку эти величины обеспечивают равенство при подстановке в оба уравнения.

1.7.2. Практические задачи, требующие решения систем уравнений

В науке и инженерной практике существует ряд ситуаций, когда необходимо решение *систем уравнений.* Так, например, закон, связывающий силу трения F и нагрузку L, имеет вид $F = aL + b$, где a и b — константы. Если $F = 5.6$, то $L = 8.0$, а при $F = 4.4$, $L = 2.0$. Определим значения a, b и F при $L = 6.5$.

Подставляя $F = 5.6$, $L = 8.0$ в $F = aL + b$, находим

$$5.6 = 8.0a + b. \qquad (1)$$

Подставляя $F = 4.4$, $L = 2.0$ в $F = aL + b$, находим

$$4.4 = 2.0a + b. \qquad (2)$$

Вычитая уравнение (2) из уравнения (1), получаем $1.2 = 6.0a$, откуда $\boldsymbol{a} = \frac{1.2}{6.0} = \mathbf{\frac{1}{5}}$.

Подстановка $a = \frac{1}{5}$ в уравнение (1) дает

$$5.6 = 8.0\left(\frac{1}{5}\right) + b,$$

$$5.6 = 1.6 + b,$$

$$5.6 - 1.6 = b \text{ и } \boldsymbol{b = 4}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{a = \frac{1}{5}}$ **и** $\boldsymbol{b = 4}$.

Если, скажем, $L = 6.5$, то

$$F = aL + b = \frac{1}{5}(6.5) + 4 = 1.3 + 4, \text{ то есть } \boldsymbol{F = 5.30}.$$

Пример. Сопротивление провода R Ом при температуре t°C задается уравнением $R = R_0(1 + \alpha t)$, где R_0 – сопротивление при 0°C, α – температурный коэффициент сопротивления при t°C. Определить значения α и R_0, если R = 30 Ом при t = 50°C и R = 35 Ом при t = 100°C.

Подставляя R = 30 Ом, t = 50°C в $R = R_0(1 + \alpha t)$, получаем

$$30 = R_0(1 + 50\alpha). \qquad (1)$$

Подставляя R = 35 Ом, t = 100°C в $R = R_0(1 + \alpha t)$, получаем

$$35 = R_0(1 + 100\alpha). \qquad (2)$$

Хотя эти уравнения можно решить методом обычной подстановки, более простой путь — избавиться от R_0 путем деления. Таким образом, разделив уравнение (1) на уравнение (2), получаем

$$\frac{30}{35} = \frac{R_0(1+50\alpha)}{R_0(1+100\alpha)} = \frac{1+50\alpha}{1+100\alpha}.$$

Перекрестное умножение дает:

$$30(1 + 100\alpha) = 35(1 + 50\alpha),$$
$$30 + 3000\alpha = 35 + 1750\alpha,$$
$$3000\alpha - 1750\alpha = 35 - 30,$$
$$1250\alpha = 5.$$

Итак, $\alpha = \frac{5}{1250} = \frac{1}{250}$ или $\mathbf{0.004}$.

Подставляя $\alpha = \frac{1}{250}$ в уравнение (1), получаем

$$30 = R_0\left\{1 + (50)\left(\frac{1}{250}\right)\right\},$$
$$30 = R_0(1.2),$$
$$\boldsymbol{R_0} = \frac{30}{1.2} = \mathbf{25}.$$

Следовательно, решение: α **= 0.004/°C и $\mathbf{R_0}$ = 25 Ом.**

1.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМУЛ

Если необходимо вычислить не ту величину, относительно которой построено выражение, *формулу* обычно преобразовывают для получения нового искомого. Этот процесс перегруппировки называют *преобразованием формулы* или *перестановкой*.

Используемые при перестановке правила те же, что и при решении простых уравнений (*см.* разд. 1.6); в общем их можно сформулировать так: ***равенство уравнения должно сохраняться.***

Пример. Преобразовать $p = q + r + s$ таким образом, чтобы сделать искомым r.

Цель преобразования состоит в том, чтобы получить в левой части уравнения r. Меняем местами левую и правую части уравнения таким образом, чтобы r оказалось в левой части:

$$q + r + s = p . \tag{1}$$

Вычитаем $(q + s)$ из обеих частей уравнения:

$$q + r + s - (q + s) = p - (q + s) .$$

Итак,

$$q + r + s - q - s = p - q - s .$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r = p - q - s.} \tag{2}$$

На примере простых уравнений показано, что величину можно переносить из одной части уравнения в другую, меняя при этом ее знак, т. е. уравнение (2) следует непосредственно из уравнения (1).

Пример. Преобразовать $v = f\lambda$ таким образом, чтобы в левой части получить λ.

Совершаем перестановку: $f\lambda = v$. Делим обе части уравнения на

на f, получаем $\frac{f\lambda}{f} = \frac{v}{f}$, т. е. $\lambda = \frac{v}{f}$.

Пример. Преобразовать $I = \frac{V}{R}$ таким образом, чтобы получить выражение для V.

Совершаем перестановку: $\frac{V}{R} = I$.

Умножив обе части уравнения на R, получим

$$R\frac{V}{R} = R(I) .$$

Следовательно, $\boldsymbol{V = IR}$.

Пример. Преобразовать формулу $R = \frac{\rho l}{a}$ таким образом, чтобы получить выражение для a.

Совершаем перестановку: $\frac{\rho l}{a} = R$.

Умножив на a обе части уравнения: $a\left(\frac{\rho l}{a}\right) = a(R)$, получим $\rho l = aR$. После перестановки имеем $aR = \rho l$.

Делим обе части уравнения на R: $\frac{aR}{R} = \frac{\rho l}{R}$.

Итак, $\boldsymbol{a = \frac{\rho l}{R}}$.

Пример. Итоговая длина нагретого на θ°C куска провода l_2 задается формулой $l_2 = l_1(1 + \alpha\theta)$. Преобразуем уравнение, чтобы получить выражение для коэффициента удлинения α.

После перестановки: $l_1(1 + \alpha\theta) = l_2$.

Раскрываем скобки: $l_1 + l_1\alpha\theta = l_2$.

Совершаем перестановку: $l_1\alpha\theta = l_2 - l_1$.

Делим обе части уравнения на $l_1\theta$: $\frac{l_1\alpha\theta}{l_1\theta} = \frac{l_1 - l_2}{l_1\theta}$.

Итак, $\alpha = \boldsymbol{\frac{l_1 - l_2}{l_1\theta}}$.

Пример. Формула для расчета кинетической энергии есть $k = \frac{1}{2}mv^2$. Преобразовать формулу таким образом, чтобы получить выражение для v.

Совершаем перестановку: $\frac{1}{2}mv^2 = k$.

Если искомая величина находится в квадрате, получают выражение для квадрата этой величины и извлекают из обеих частей квадратный корень.

Умножаем обе части на 2: $mv^2 = 2k$.

Делим обе части на m: $\frac{mv^2}{m} = \frac{2k}{m}$, т. е. $v^2 = \frac{2k}{m}$.

Извлекаем квадратный корень из обеих частей уравнения и получаем $\sqrt{v^2} = \sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)}$, т. е. $\boldsymbol{v = \sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)}}$.

Пример. Импеданс схемы переменного тока задается как $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Получить уравнения относительно реактивного сопротивления X.

Совершаем перестановку: $\sqrt{R^2 + X^2} = Z$.

Возводим обе части уравнения в квадрат: $R^2 + X^2 = Z^2$.

Снова проводим перестановку: $X^2 = Z^2 - R^2$.

Извлекаем корень квадратный из обеих частей: $X = \sqrt{Z^2 - R^2}$.

Пример. Преобразовать формулу $p = \frac{a^2x + a^2y}{r}$ таким образом, чтобы получить выражение для a.

Совершаем перестановку: $\frac{a^2x + a^2y}{r} = p$.

Умножаем обе части на r: $a^2x + a^2y = rp$.

Разлагаем на множители левую часть уравнения: $a^2(x + y) = rp$.

Делим обе части на $(x + y)$: $\frac{a^2(x+y)}{(x+y)} = \frac{rp}{(x+y)}$.

Итак, $a^2 = \frac{rp}{(x+y)}$.

Извлекаем квадратный корень из обеих частей: $a = \sqrt{\left(\frac{rp}{x+y}\right)}$.

Пример. Выразить p как функцию от D, d и f, если дано, что $\frac{D}{d} = \sqrt{\frac{f+p}{f-p}}$.

Совершаем перестановку: $\sqrt{\frac{f+p}{f-p}} = \frac{D}{d}$.

Возводим обе части в квадрат: $\left(\frac{f+p}{f-p}\right) = \frac{D^2}{d^2}$.

Осуществляем перекрестное умножение, т. е. умножаем каждый член на $d^2(f - p)$: $d^2(f + p) = D^2(f - p)$.

Раскрываем скобки: $d^2f + d^2p = D^2f - D^2p$.

Совершаем перестановку, чтобы собрать все содержащие p члены в левой части уравнения: $d^2p + D^2p = D^2f - d^2f$.

Выносим общие множители за скобки: $p(d^2 + D^2) = f(D^2 - d^2)$.

Делим обе части уравнения на $(d^2 + D^2)$:

$$p = \frac{f(D^2 - d^2)}{(d^2 + D^2)}.$$

1.9. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.9.1. Введение в теорию квадратных уравнений

Как сформулировано в разд. 1.6, *уравнение* — это равенство, которое выполняется при некоторых значениях входящих в него неизвестных. Значения неизвестных, обращающие уравнение в тождество, называют решениями или *корнями* уравнения.

Решить уравнение означает найти множество всех его решений (корней).

Квадратное уравнение — уравнение, максимальный показатель степени в котором равен 2. Например, $x^2 - 3x + 1 = 0$ есть квадратное уравнение.

Существует четыре способа решения квадратных уравнений:

1. *Разложение на множители.*
2. *Дополнение до полного квадрата.*
3. Использование *формулы корней квадратного уравнения.*
4. *Графический метод* (см. разд. 4.4).

1.9.2. Решение методом разложения на множители

Умножение $(2x + 1)(x - 3)$ дает $2x^2 - 6x + x - 3$, т. е. $2x^2 - 5x - 3$. Обратный процесс перехода от $2x^2 - 5x - 3$ к $(2x + 1)(x - 3)$ называется *разложением на множители.*

Если квадратное уравнение может быть разложено на множители — это простейший метод решения квадратного уравнения. Так, например, если $2x^2 - 5x - 3$ разложить на множители, получим $(2x + 1)(x - 3) = 0$.

Тогда либо $(2x + 1) = 0$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$, либо $(x - 3) = 0$, т. е. $x = 3$.

Разложение на множители часто называют *методом проб и ошибок.*

Пример. Решить уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$, используя метод разложения на множители.

Множители для x^2 — это x и x. Расположим их в скобках следующим образом: $(x\ \ )(x\ \ )$. Множители для -8: $+8$ и -1, или -8 и $+1$, или $+4$ и -2, или -4 и $+2$. Единственная комбинация, которая дает средний член $+2x$, это $+4$ и -2, т. е.

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

(Заметим, что результат сложения произведения двух внутренних членов с произведением двух внешних членов должен равняться среднему члену в квадратном уравнении; в данном случае это $+2$.)

Таким образом, квадратное уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$ преобразуется в $(x + 4)(x - 2) = 0$. Поскольку это равенство верно только в том случае, когда первый, второй или оба множителя равны нулю, то либо $(x + 4) = 0$, т. е. $x = -4$, либо $(x - 2) = 0$, т. е. $x = 2$.

Следовательно, корни квадратного уравнения $\boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}$ **суть** $\boldsymbol{x = -4}$ и $\boldsymbol{x = 2}$.

Пример. Найти корни $x^2 - 6x + 9 = 0$, используя метод разложения на множители.

$x^2 - 6x + 9 = 0$, значит, $(x - 3)(x - 3) = 0$, т. е. $(x - 3)^2 = 0$ (в левой части уравнения находится так называемый *полный квадрат)*. Следовательно, $x = 3$ есть единственный корень уравнения $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Пример. Найти корни $4x^2 - 25 = 0$, используя метод разложения на множители.

$4x^2 - 25 = 0$ (в левой части уравнения находится *разность двух квадратов*, $(2x)^2$ и $(5)^2$).

Итак, $(2x + 5)(2x - 5) = 0$.

Следовательно, или $(2x+5) = 0$, т. е. $x = -\frac{5}{2}$, или

$$(2x-5) = 0, \text{ т. е. } x = \frac{5}{2}.$$

Пример. Корни квадратного уравнения равны $\frac{1}{3}$ и -2. Составить уравнение для x.

Если корни квадратного уравнения равны α и β, то $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$.

Таким образом, при $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\beta = -2$:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-(-2)) = 0,$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2) = 0,$$

$$x^2-\frac{1}{3}x+2x-\frac{2}{3} = 0,$$

$$x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{3x^2+5x-2 = 0}$.

1.9.3. Решение методом дополнения до полного квадрата

Выражение типа x^2, или $(x + 2)^2$, или $(x - 3)^2$, называется *полным квадратом*.

Если $x^2 = 3$, то $x = \pm\sqrt{3}$.

Если $(x+2)^2 = 5$, то $x+2 = \pm\sqrt{5}$ и $x = -2\pm\sqrt{5}$.

Если $(x-3)^2 = 8$, то $x-3 = \pm\sqrt{8}$ и $x = 3\pm\sqrt{8}$.

Следовательно, если квадратное уравнение можно преобразовать таким образом, чтобы в одной части уравнения находился полный квадрат, а в другой части — число, тогда решение легко найти, взяв корень из каждой части уравнения, как в приведенных выше примерах. Процесс перегруппировки квадратного уравнения перед решением называется *дополнением до полного квадрата*. Имеем

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Таким образом, для преобразования квадратичного выражения типа $x^2 + 2ax$ необходимо добавить к нему половину коэффициента при x, возведенную в квадрат, т. е. $\left(\frac{2a}{2}\right)^2$ или a^2.

Пример. Выражение $x^2 + 3x$ становится полным квадратом при добавлении $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, т. е. $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.

Пример. Решить $2x^2 + 5x = 3$ методом дополнения до полного квадрата.

Шаг 1. Перегруппируем уравнение таким образом, чтобы все члены находились в одной части относительно знака равенства (коэффициент при x^2 должен быть положительным). То есть $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Шаг 2. Приравниваем коэффициент при x^2 равным единице. В данном случае этого можно достичь, разделив уравнение на 2.

Следовательно, $\frac{2x^2}{2} + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$, т. е. $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$.

Шаг 3. Перегруппируем уравнение таким образом, чтобы члены с x^2 и x находились в одной части уравнения относительно знака равенства, а константа — в другой. Тогда $x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$.

Шаг 4. Прибавляем к каждой части уравнения половину коэффициента при x, возведенную в квадрат. В данном случае коэффициент при x равен $\frac{5}{2}$. Следовательно, половина коэффициента в квадрате — это $\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

Таким образом, $x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

Теперь в левой части уравнения находится полный квадрат, т. е. $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

Шаг 5. Упрощаем правую часть уравнения. Получаем

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}+\frac{25}{16} = \frac{24+25}{16} = \frac{49}{16}.$$

Шаг 6. Извлекаем квадратный корень из обеих частей уравнения (необходимо помнить, что квадратный корень имеет два значения: со знаком + и со знаком –).

Таким образом, $\sqrt{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{49}{16}\right)}$.

Итак, $x+\frac{5}{4} = \pm\frac{7}{4}$.

Шаг 7. Решаем простое уравнение. Получаем $x = -\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}$.

Итак, $x = -\frac{5}{4}+\frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{5}{4}-\frac{7}{4} = -\frac{12}{4} = -3$.

Следовательно, $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$ **и –3** суть корни уравнения $2x^2 + 5x = 3$.

1.9.4. Использование формулы корней квадратного уравнения

Если $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\boxed{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Это выражение известно как *формула корней квадратного уравнения.*

Решим, например, $3x^2 - 11x - 4 = 0$, используя формулу корней квадратного уравнения. Сравним $3x^2 - 11x - 4 = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$, в результате получим $a = 3$, $b = -11$, $c = -4$. Следовательно,

$$x = \frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)} =$$

$$= \frac{11\pm\sqrt{121+48}}{6} = \frac{11\pm\sqrt{169}}{6} = \frac{11\pm 13}{6}.$$

Итак, $x = \frac{24}{6} = \mathbf{4}$ и $x = \frac{-2}{6} = -\mathbf{\frac{1}{3}}$.

1.9.5. Практические задачи, требующие решения квадратных уравнений

Существует множество *практических задач*, требующих решения составленных по заданным условиям квадратных уравнений.

Пример. Высота s брошенного вертикально вверх тела в момент времени t определяется как $s = ut - \frac{1}{2}gt^2$. Определить, через какое время после броска тело окажется на высоте 16 м при подъеме и при падении, если $u = 30$ м/с, $g = 9.81$ м/с^2.

Если высота $s = 16$ м, то $16 = 30t - \frac{1}{2}(9.81)t^2$, т. е.

$$4.905t^2 - 30t + 16 = 0.$$

Используя формулу корней квадратного уравнения, имеем

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4.905)(16)}}{2(4.905)} = \frac{30 \pm \sqrt{586.1}}{9.81} = \frac{30 \pm 24.21}{9.81}.$$

Итак, $t =$ **5.53** и **0.59**.

Следовательно, тело достигнет высоты 16 м через **0.59 с при подъеме** и через **5.53 с при падении.**

Пример. Ангар имеет длину 4.0 м и ширину 2.0 м. Вокруг ангара по всему периметру расположена бетонная дорожка постоянной ширины, и ее площадь составляет 9.50 м^2. Вычислить ширину дорожки с точностью до сантиметра.

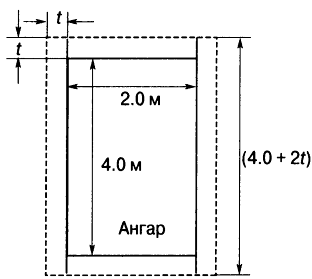


Рис. 1.1

На **Рис. 1.1** показан план ангара с окружающей его дорожкой шириной t метров. Площадь дорожки равна $2(2.0 \times t) + 2t(4.0 + 2t)$,

т. е. $9.50 = 4.0t + 8.0t + 4t^2$ или $4t^2 + 12.0t - 9.50 = 0$. Следовательно,

$$t = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12.0)^2 - 4(4)(-9.50)}}{2(4)} =$$

$$= \frac{-12.0 \pm \sqrt{296.0}}{8} = \frac{-12.0 \pm 17.20465}{8}.$$

Значит, $t = 0.6506$ м или -3.65058 м.

Пренебрегая отрицательным результатом, который не имеет физического смысла, получаем, что ширина дорожки $t = 0.651$ **м**, или **65 см**, с точностью до сантиметра.

1.9.6. Система из одного линейного и одного квадратного уравнения

Иногда необходимо решить систему из линейного и квадратного уравнений.

Пример. Определить значения x и y, удовлетворяющие сразу двум уравнениям: $y = 5x - 4 - 2x^2$ и $y = 6x - 7$.

При одновременном решении этих двух уравнений значения y должны быть равны, следовательно, можно приравнять правые части уравнений. Тогда $5x - 4 - 2x^2 = 6x - 7$.

Совершая перестановку, получаем $5x - 4 - 2x^2 - 6x + 7 = 0$, или $-x + 3 - 2x^2 = 0$, или $2x^2 + x - 3 = 0$.

Разложение на множители дает $(2x + 3)(x - 1) = 0$.

Следовательно, $x = -\frac{3}{2}$ или $x = 1$.

В уравнении $y = 6x - 7$ при $x = -\frac{3}{2}$, $y = 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = -16$, а при $x = 1$, $y = 6 - 7 = -1$.

Подставляя результат в $y = 5x - 4 - 2x^2$, получим при $x = -\frac{3}{2}$, $y = 5\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{15}{2} - 4 - \frac{9}{2} = -16\right)$.

В результате получаем тот же ответ, что и выше. При $x = 1$, $y = 5 - 4 - 2 = -1$, т. е. снова получаем прежний ответ.

Итак, общее решение: $\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}, y = -16}$ и $\boldsymbol{x = 1, y = -1}$.

1.10. НЕРАВЕНСТВА

1.10.1. Введение в теорию неравенств

Неравенство — это любое выражение, содержащее один из символов $<$, $>$, $\le$ или $\ge$.

$p < q$ означает, что p меньше q,

$p > q$ означает, что p больше q,

$p \le q$ означает, что p меньше или равно q,

$p \ge q$ означает, что p больше или равно q.

1.10.2. Некоторые простые правила

- Если некая величина ***прибавляется или вычитается*** из обеих частей неравенства, ***неравенство сохраняется***. Например:

если $p < 3$, то $p + 2 < 3 + 2$ (прибавляем 2 к обеим частям неравенства) и $p - 2 < 3 - 2$ (вычитаем 2 из обеих частей).

- При ***умножении или делении*** обеих частей неравенства на ***положительную*** величину, скажем 5, ***неравенство сохраняется***. Например:

  если $p > 4$, то $5p > 20$ и $\frac{p}{5} > \frac{4}{5}$.

- При ***умножении или делении*** неравенства на ***отрицательную величину***, скажем -3, ***неравенство меняется на противоположное (знак в неравенстве меняется на противоположный)***. Например:

  если $p > 1$, то $-3p < -3$ и $\frac{p}{-3} < \frac{1}{-3}$.

  (Отметим, что знак $>$ изменился на знак $<$.)

Решить неравенство — значит найти все значения переменной, при которых неравенство верно.

1.10.3. Простые неравенства

Пример. Решить следующие неравенства:
а) $3 + x > 7$; б) $z - 2 \geq 5$.

а) Вычитаем 3 из обеих частей неравенства: $3 + x - 3 > 7 - 3$, т. е. $\boldsymbol{x > 4}$.
Следовательно, все значения x больше 4 удовлетворяют неравенству.

б) Добавляем 2 к обеим частям неравенства: $z - 2 + 2 \geq 5 + 2$, т. е. $\boldsymbol{z \geq 7}$.
Следовательно, все значения z, которые больше или равны 7, удовлетворяют неравенству.

Пример. Решить неравенство $4x + 1 > x + 5$.

Вычитаем 1 из обеих частей неравенства, получим $4x > x + 4$.

Вычитаем x из обеих частей неравенства $4x > x + 4$, получим $3x > 4$.

Делим обе части неравенства $3x > 4$ на 3:

$$\boldsymbol{x > \frac{4}{3}}.$$

Следовательно, все значения x больше $\frac{4}{3}$ удовлетворяют неравенству $4x + 1 > x + 5$.

1.10.4. Неравенства, содержащие модуль

Модуль числа — это абсолютная величина числа со знаком +. Модуль обозначается двумя вертикальными линиями слева и справа от числа.

Пример. $|4| = 4$ и $|-4| = 4$ (модуль числа всегда положителен).

Неравенство $|t| < 1$ включает все числа, величина которых без учета знака меньше единицы, т. е. любую величину в диапазоне от -1 до $+1$.

Таким образом, $|t| < 1$ **означает** $\mathbf{-1 < t < 1}$.

Аналогично $|x| > 3$ включает, независимо от знака, все величины больше 3 и меньше -3.

Таким образом, $|x| > 3$ означает $\mathbf{x > 3}$ **или** $\mathbf{x < -3}$.

Пример. Решить неравенство $|3x + 1| < 4$.

$|3x + 1| < 4$ означает $-4 < 3x + 1 < 4$,

$-4 < 3x + 1$ преобразуется в $-5 < 3x$ и $-\frac{5}{3} < x$,

$3x + 1 < 4$ преобразуется в $3x < 3$ и $x < 1$.

При объединении этих двух результатов получаем $\mathbf{-\frac{5}{3} < x < 1}$, а это означает, что неравенству $|3x + 1| < 4$ удовлетворяют значения x больше $-\frac{5}{3}$ и меньше 1.

1.10.5. Неравенства, содержащие отношения

Если $\frac{p}{q} > 0$, то $\frac{p}{q}$ — это положительная величина.

Величина $\frac{p}{q}$ положительна, если p **и** q положительны или p **и** q отрицательны, т. е.

$$\frac{+}{+} = + \text{ и } \frac{-}{-} = + .$$

Если $\frac{p}{q} < 0$, то $\frac{p}{q}$ — это отрицательная величина.

Величина $\frac{p}{q}$ отрицательна, если величина p положительна, **а** q — отрицательна, **или** же величина p отрицательна, **а** q — положительна, т. е.

$$\frac{+}{-} = - \text{ и } \frac{-}{+} = - .$$

Пример. Решить неравенство $\frac{t+1}{3t-6} > 0$.

Величина $\frac{t+1}{3t-6} > 0$, если: а) $t + 1 > 0$ ***и*** $3t - 6 > 0$ ***или*** б) $t + 1 < 0$ ***и*** $3t - 6 < 0$.

а) Если $t + 1 > 0$, то $t > -1$ и если $3t - 6 > 0$, то $3t > 6$ и $t > 2$.

Оба неравенства $t > -1$ и $t > 2$ верны одновременно только при $t > 2$, т. е. дробь $\frac{t+1}{3t-6}$ положительна только при $\boldsymbol{t > 2}$.

б) Если $t + 1 < 0$, то $t < -1$ и если $3t - 6 < 0$, то $3t < 6$ и $t < 2$.

Оба неравенства $t < -1$ и $t > 2$ верны одновременно только при $t < -1$, т. е. дробь $\frac{t+1}{3t-6}$ положительна при $\boldsymbol{t < -1}$.

В итоге $\frac{t+1}{3t-6} > 0$ **при** $\boldsymbol{t > 2}$ **или** $\boldsymbol{t < -1}$.

1.10.6. Неравенства, содержащие квадратичные функции

Если неравенство содержит *квадратичные функции*, то к нему применяются два следующих базовых правила:

1. Если $\boldsymbol{x^2 > k}$, **то** $\boldsymbol{x > \sqrt{k}}$ **или** $\boldsymbol{x < -\sqrt{k}}$.
2. Если $\boldsymbol{x^2 < k}$, **то** $\boldsymbol{-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}}$.

Пример. Решить неравенство $t^2 > 9$.

$$t^2 > 9, \text{ значит, } t^2 - 9 > 0.$$

Разложим это неравенство на множители: $(t+3)(t-3) > 0$.

Выражение $(t+3)(t-3)$ положительно, если: а) $(t+3) > 0$ **и** $(t-3) > 0$ или б) $(t+3) < 0$ **и** $(t-3) < 0$.

а) Если $(t+3) > 0$, то $t > -3$ и если $(t-3) > 0$, то $t > 3$.

Оба неравенства верны одновременно только при $t > 3$.

б) Если $(t+3) < 0$, то $t < -3$, и если $(t-3) < 0$, то $t < 3$.

Оба неравенства верны одновременно только при $t < -3$.

В итоге $t^2 > 9$ при $\boldsymbol{t > 3}$ **или** $\boldsymbol{t < -3}$, что подтверждает приведенное выше правило (1).

Пример. Решить неравенство $t^2 < 9$.

$t^2 < 9$, значит, $t^2 - 9 < 0$.

Разложим это неравенство на множители: $(t+3)(t-3) < 0$.

Выражение $(t+3)(t-3)$ отрицательно, если: а) $(t+3) > 0$ **и** $(t-3) < 0$ или б) $(t+3) < 0$ **и** $(t-3) > 0$.

а) Если $(t+3) > 0$, то $t > -3$ и если $(t-3) < 0$, то $t < 3$.

Следовательно, неравенства из п. а) верны при $t > -3$ и $t < 3$, что можно записать в виде $\boldsymbol{-3 < t < 3}$.

б) Если $(t+3) < 0$, то $t < -3$ и если $(t-3) > 0$, то $t > 3$.

Невозможно одновременно удовлетворить неравенствам $t < -3$ и $t > 3$; значит, ни одно значение t не удовлетворяет условиям б).

В итоге $t^2 < 9$ при $\mathbf{-3 < t < 3}$, т. е. все значения t между -3 и 3 удовлетворяют неравенству, что подтверждает правило (2).

1.10.7. Квадратичные неравенства

Неравенства, содержащие квадратичные выражения, могут быть решены методом *разложения на множители* или же методом *дополнения до полного квадрата.*

Например, $x^2 - 2x - 3$ разлагается на множители в виде $(x+1)(x-3)$; выражение $6x^2 + 7x - 5$ разлагается на множители как $(2x-1)(3x+5)$.

Если квадратичное выражение не разлагается на множители, то используется метод дополнения до полного квадрата. Для выражения типа $x^2 + bx + c$ данная процедура в общем виде такова:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right).$$

Например, $x^2 + 4x - 7$ не разлагается на множители, а дополнение до полного квадрата дает

$$x^2 + 4x - 7 \equiv (x+2)^2 - 7 - 2^2 \equiv (x+2)^2 - 11.$$

Аналогично $x^2 - 6x - 5 \equiv (x-3)^2 - 5 - 3^2 \equiv (x-3)^2 - 14$.

Пример. Решить неравенство $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Разлагаем $x^2 + 2x - 3 > 0$ на множители: $(x-1)(x+3)$.

Произведение $(x-1)(x+3)$ положительно, если а) $(x-1) > 0$ и $(x+3) > 0$, б) $(x-1) < 0$ и $(x+3) < 0$.

а) Поскольку $(x-1) > 0$, то $x > 1$, и поскольку $(x+3) > 0$, то $x > -3$.

Оба этих неравенства верны одновременно только при $\mathbf{x > 1}$.

б) Поскольку $(x-1) < 0$, то $x < 1$, и поскольку $(x+3) < 0$, то $x < -3$.

Оба этих неравенства верны одновременно только при $\mathbf{x < -3}$.

Итак, неравенство $x^2 + 2x - 3 > 0$ верно только при $\mathbf{x > 1}$ **или** $\mathbf{x < -3}$.

Пример. Решить неравенство $y^2 - 8y - 10 \geq 0$.

Выражение $y^2 - 8y - 10$ на множители не разлагается. Применим метод дополнения до полного квадрата:

$$y^2 - 8y - 10 \equiv (y-4)^2 - 10 - 4^2 \equiv (y-4)^2 - 26.$$

Неравенство приобретает вид $(y-4)^2-26 \geq 0$, или $(y-4)^2 \geq 26$.

Отсюда $(y-4) \geq \sqrt{26}$, или $(y-4) \leq -\sqrt{26}$.

Значит, $y \geq 4+\sqrt{26}$, или $y \leq 4-\sqrt{26}$.

Следовательно, $y^2-8y-10 \geq 0$ верно при $\boldsymbol{y \geq 9.10}$ **или** $\boldsymbol{y \leq -1.10}$ с точностью до двух знаков после десятичной точки.

1.10.8. Области

Область — это множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих некоторому неравенству.

Например, на **Рис. 1.2а** заштрихованная область задается неравенством $x > 3$, прямая $x = 3$ показана пунктиром, а на **Рис. 1.2б** заштрихованная область определяется неравенством $x \geq 3$, прямая $x = 3$ показана сплошной линией. Область $x \geq 3$ включает все точки на прямой $x = 3$ и справа от нее.

Аналогично заштрихованная область на **Рис. 1.3** определяется неравенством $y \leq -2$.

На **Рис. 1.4** пунктиром показана прямая $x + y = 4$ (отметим, что если $x + y = 4$, то $y = -x + 4$, а это прямая линия с тангенсом угла наклона -1, пересекающая ось y в точке $y = 4$); заштрихованная область определяется как $x + y < 4$.

Пример. Показать на декартовой плоскости следующие области: а) $y > 3x - 2$, б) $x + 2y < 8$.

а) На **Рис. 1.5** показана прямая $y = 3x - 2$, а заштрихованная область определяется неравенством $y > 3x - 2$.

б) На **Рис. 1.6** пунктиром показана прямая $x + 2y = 8$ (т. е. $2y = -x + 8$ или $y = -\frac{1}{2}x+4$, это прямая с тангенсом угла наклона $-\frac{1}{2}$, пересекающая ось y в точке $y = 4$), и заштрихованная область определяется неравенством $x + 2y < 8$. (Для проверки возьмем любую точку, например $x = 1$, $y = 1$, тогда $x + 2y = 1 + 2 = 3$, это меньше 8. Заштрихованная область включает все точки, для которых $x + 2y < 8$.)

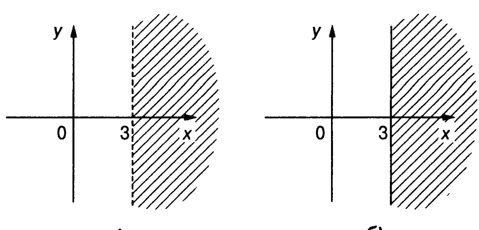


Рис. 1.2

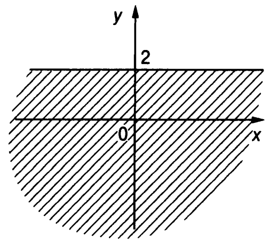


Рис. 1.3

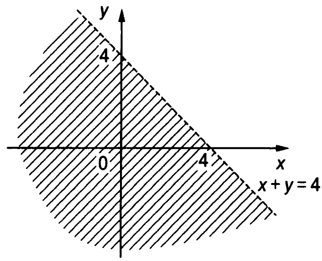


Рис. 1.4

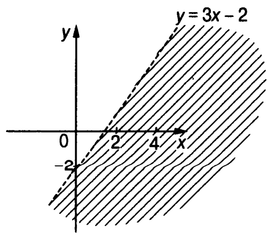


Рис. 1.5

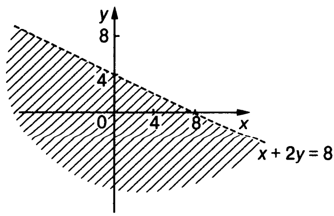


Рис. 1.6

1.11. ЛОГАРИФМЫ

1.11.1. Введение в теорию логарифмов

При сегодняшней широкой распространенности калькуляторов таблицы логарифмов редко используются для вычислений. Однако теория логарифмов важна, поскольку ряд научных и инженерных законов включает логарифмический закон. Если число y может быть записано в виде a^x, то показатель степени x называют *логарифмом у по основанию а*. Таким образом,

$$\boxed{\text{если } y = a^x, \text{ то } x = \log_a y}$$

Итак, поскольку $1000 = 10^3$, то $3 = \log_{10}1000$.

Проверьте это, используя функцию «log» в вашем калькуляторе.

Логарифмы по основанию 10 называют *десятичными логарифмами*, а обозначение $\log_{10}$ обычно сокращают до lg. С помощью калькулятора можно проверить следующие значения:

$\lg 17.9 = 1.2528...$, $\lg 462.7 = 2.6652...$ и $\lg 0.0173 = -1.7619...$.

Логарифмы по основанию e (e — математическая константа, приблизительно равная 2.7183) называют ***натуральными логарифмами,*** и $\log_e$ обычно сокращают до ln. С помощью калькулятора можно проверить следующие значения:

$\ln 3.15 = 1.1474...$, $\ln 362.7 = 5.8935...$ и $\ln 0.156 = -1.8578...$.

Более подробно о натуральных логарифмах можно прочесть в разд. 1.12.

1.11.2. Правила вычисления логарифмов

Есть три правила, всегда применимые при вычислении логарифмов:

- Логарифм произведения:

$$\boxed{\log(A \times B) = \log A + \log B} \qquad (1)$$

- Логарифм отношения:

$$\boxed{\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B} \qquad (2)$$

- Логарифм степени:

$$\boxed{\ln A^n = n \log A} \qquad (3)$$

Пример. Вычислить: а) $\log_3 9$, б) $\log_{10} 10$, в) $\log_{16} 8$.

а) Пусть $x = \log_3 9$; тогда по определению логарифма $3^x = 9$, т. е. $3^x = 3^2$, откуда $x = 2$.
Следовательно, $\mathbf{\log_3 9 = 2}$.

б) Пусть $x = \log_{10} 10$; тогда по определению логарифма $10^x = 10$, т. е. $10^x = 10^1$, откуда $x = 1$.
Следовательно, $\mathbf{\log_{10} 10 = 1}$ (это можно проверить с помощью калькулятора).

в) Пусть $x = \log_{16} 8$; тогда, исходя из определения логарифма, $16^x = 8$, т. е. $(2^4)^x = 2^3$; значит, $2^{4x} = 2^3$, откуда $4x = 3$ и $x = \frac{3}{4}$.
Следовательно, $\mathbf{\log_{16} 8 = \frac{3}{4}}$.

Пример. Вычислить: а) $\lg 0.001$, б) $\ln e$, в) $\log_3 \frac{1}{81}$.

а) Пусть $x = \lg 0.001 = \log_{10} 0.001$, тогда $10^x = 10^{-3}$, откуда $x = -3$.
Следовательно, $\mathbf{\lg 0.001 = -3}$ (можно проверить с помощью калькулятора).

б) Пусть $x = \ln e = \log_e e$, тогда $e^x = e$, т. е. $e^x = e^1$, откуда $x = 1$. Следовательно, $\mathbf{\ln e = 1}$ (можно проверить с помощью калькулятора).

в) Пусть $x = \log_3 \frac{1}{81}$. Тогда $3^x = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$, откуда $x = -4$.

Следовательно, $\mathbf{\log_3 \frac{1}{81} = -4}$.

Пример. Решить уравнения: а) $\lg x = 3$, б) $\log_2 x = 3$, в) $\log_5 x = -2$.

а) Если $\lg x = 3$, то $\log_{10} x = 3$ и $x = 10^3$, т. е. $x = \mathbf{1000}$.

б) Если $\log_2 x = 3$, то $x = \mathbf{2^3 = 8}$.

в) Если $\log_5 x = -2$, то $x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \mathbf{\frac{1}{25}}$.

Пример. Решить уравнение $\log(x-1) + \log(x+1) = 2\log(x+2)$.

$$\log(x-1) + \log(x+1) = 2\log(x-1)(x+1).$$

По формуле логарифма произведения

$$2\log(x-1)(x+1) = \log(x^2-1),$$

$$2\log(x+2) = \log(x+2)^2 = \log(x^2+4x+4).$$

Значит, если $\log(x^2-1) = \log(x^2+4x+4)$, то

$$x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4,$$

$$-1 = 4x + 4,$$

$$-5 = 4x.$$

Итак, $x = \mathbf{-\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}}$.

1.11.3. Показательные уравнения

Правила вычисления логарифмов могут быть применены для решения одного класса уравнений, называемых *показательными*.

Пример. Решить уравнение $3^x = 27$.

Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих сторон. Получим $\log_{10} 3^x = \log_{10} 27$.

Тогда $x \log_{10} 3 = \log_{10} 27$, согласно правилу взятия логарифма степени. Перестроим уравнение:

$$x = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 3} = \frac{1.43136\ldots}{0.4771\ldots} = 3.$$

Этот результат легко проверить. (Отметим, что $\frac{\log 27}{\log 3}$ не равняется $\log\frac{27}{3}$.)

Пример. Решить уравнение $2^{x+1} = 3^{2x-5}$ с точностью до 2 знаков после десятичной точки.

Возьмем от обеих частей уравнения логарифм по основанию 10:

$$\log_{10} 2^{x+1} = \log_{10} 3^{2x-5}.$$

Тогда

$$(x + 1) \log_{10} 2 = (2x - 5) \log_{10} 3,$$

$$x \log_{10} 2 + \log_{10} 2 = 2x \log_{10} 3 - 5 \log_{10} 3,$$

$$x(0.3010) + (0.3010) = 2x(0.4771) - 5(0.4771),$$

$$0.3010x + 0.3010 = 0.9542x - 0.2385,$$

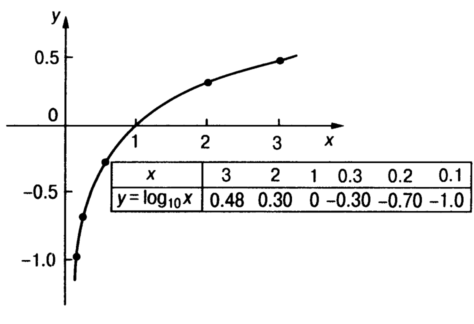
$$2.3855 + 0.3010 = 0.9542x - 0.3010x,$$

$$2.6865 = 0.6532x.$$

Откуда $x = \dfrac{2.6865}{0.6532} = \mathbf{4.11}$ с точностью до 2 знаков после десятичной точки.

1.11.4. Графики логарифмических функций

На **Рис. 1.7** показан график функции $y = \log_{10} x$, а на **Рис. 1.8** показан график функции $y = \log_e x$. Оба имеют похожую форму; на самом деле, графики логарифмов по любому основанию имеют похожую форму.



x	3	2	1	0.3	0.2	0.1
$y = \log_{10} x$	0.48	0.30	0	−0.30	−0.70	−1.0

Рис. 1.7

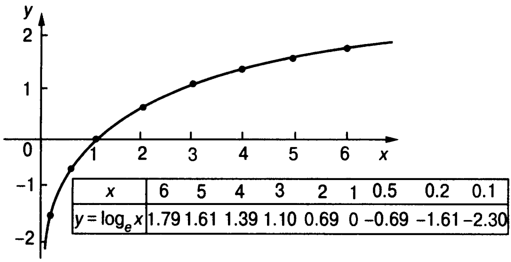


Рис. 1.8

Логарифм по любому основанию обладает следующими свойствами:

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a a = 1$,
- $\log_a 0 \to -\infty$.

1.12. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1.12.1. Экспоненциальная функция

Экспоненциальная функция — это функция, содержащая e^x, где e — константа, приблизительно равная 2.7183. Понятие экспоненциальной функции возникло из естественных законов роста и убывания, а число e используется как основание натуральных логарифмов.

1.12.2. Вычисление экспоненциальных функций

Величину e^x можно найти с помощью:

- калькулятора,
- степенных рядов для e^x,
- таблиц экспоненциальных функций.

Чаще всего вычисление экспоненциальных функций осуществляется при помощи инженерного *калькулятора*, который сегодня заменил логарифмические таблицы.

Большинство инженерных калькуляторов имеют функцию e^x, позволяющую определить все значения e^x и e^{-x} с точностью до 8 или 9 значащих цифр. Например:

$$e^1 = 2.7182818, \; e^{2.4} = 11.023176.$$

Так, $e^{-1.618} = 0.19829489$ с точностью до 8 значащих цифр.

Как правило, в практических ситуациях выдаваемая калькулятором точность намного выше требуемой. Поэтому обычно в результате оставляют на одну значащую цифру больше, чем в измеренном значении с наименьшим количеством значащих цифр.

Проверьте с помощью калькулятора следующие значения:

$$\begin{aligned}
e^{0.12} &= 1.1275 \text{ с точностью до 5 значащих цифр,}\\
e^{-1.47} &= 0.22993 \text{ с точностью до 5 знаков после точки,}\\
e^{-0.431} &= 0.6499 \text{ с точностью до 4 знаков после точки,}\\
e^{9.32} &= 11\,159 \text{ с точностью до 5 значащих цифр,}\\
e^{-2.785} &= 0.0617291 \text{ с точностью до 7 знаков после точки.}
\end{aligned}$$

1.12.3. Степенной ряд для e^x

Поскольку e^x разлагается в следующий *степенной ряд*, величину e^x можно оценить с любой требуемой степенью точности:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \qquad (1)$$

где $3! = 3 \times 2 \times 1$ и называется 3 факториал.

Ряд верен для всех значений x.

Говорят, что этот ряд *сходится*, т. е., если сложить все его члены, мы получим истинное значение e^x (где x — действительное число). Чем больше взято членов, тем ближе величина e^x к его истинному значению. Значение числа e с точностью, скажем, до 4 знаков после точки можно определить, подставив в степенной ряд (1) $x = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
e^1 &= 1 + 1 + \frac{(1)^2}{2!} + \frac{(1)^3}{3!} + \frac{(1)^4}{4!} + \frac{(1)^5}{5!} + \frac{(1)^6}{6!} + \frac{(1)^7}{7!} + \frac{(1)^8}{8!} + \dots =\\
&= 1 + 1 + 0.5 + 0.16667 + 0.04167 + 0.00833 + 0.00139 +\\
&\qquad + 0.00020 + 0.00002 + \dots = 2.71828\,.
\end{aligned}$$

То есть $e = 2.7183$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Определим величину $e^{0.05}$ с точностью, скажем, до 8 значащих цифр, подставив $x = 0.05$ в степенной ряд для e^x. Получаем

$$e^{0.05} = 1 + 0.05 + \frac{(0.05)^2}{2!} + \frac{(0.05)^3}{3!} + \frac{(0.05)^4}{4!} + \frac{(0.05)^5}{5!} + \dots =$$

$$= 1 + 0.05 + 0.00125 + 0.000020833 + 0.000000260 + 0.000000003\,.$$

После сложения:

$$e^{0.05} = 1.0512711 \text{ с точностью до 8 значащих цифр.}$$

В данном примере последовательные члены быстро уменьшаются, поэтому определить значение $e^{0.05}$ с высокой степенью точности довольно просто. Однако, если величина x близка к 1 или больше единицы, для получения точного результата требуется очень большое количество членов.

Если в ряду (1) заменить x на $-x$, то

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \dots .$$

Итак,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Аналогичным образом степенной ряд для e^x можно использовать для оценки любой экспоненциальной функции вида ae^{kx}, где a и k — константы. Заменим в степенном ряду (1) x на kx.

Тогда

$$ae^{kx} = a\left\{1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \dots\right\}.$$

Таким образом,

$$5e^{2x} = 5\left\{1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right\} =$$

$$= 5\left\{1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \dots\right\}.$$

Итак,

$$5e^{2x} = 5\left\{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots\right\}.$$

1.12.4. Графики экспоненциальных функций

Полученные с помощью калькулятора величины e^x и e^{-x} с точностью до 2 знаков после десятичной точки для диапазона от $x = -3$ до $x = 3$ показаны в следующей таблице.

x	−3.0	−2.5	−2.0	−1.5	−1.0	−0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
e^x	0.05	0.08	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00	1.65	2.72	4.48	7.39	12.18	20.09
e^{-x}	20.09	12.18	7.39	4.48	2.72	1.65	1.00	0.61	0.37	0.22	0.14	0.08	0.05

На **Рис. 1.9** показаны графики функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

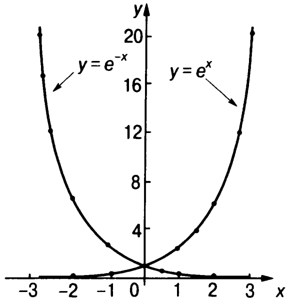


Рис. 1.9

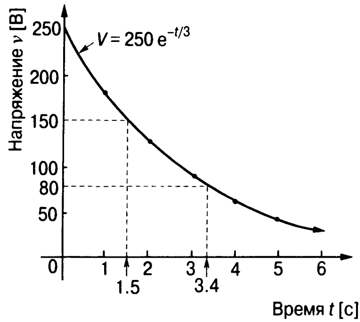


Рис. 1.10

Пример. Снижение напряжения на емкости v вольт за время t секунд задается уравнением $v = 250e^{-t/3}$. Построить график падения напряжения за первые 6 секунд.

Таблица значений графика приведена ниже.

t	0	1	2	3	4	5	6
$e^{-t/3}$	1.00	0.7165	0.5134	0.3679	0.2636	0.1889	0.1353
$v = 250e^{-t/3}$	250.0	179.1	128.4	91.97	65.90	47.22	33.83

Кривая естественного спада напряжения $v = 250e^{-t/3}$ показана на **Рис. 1.10**.

Из графика следует: если время t **= 3.4 с**, то напряжение v **= 80 В**; если напряжение v **= 150 В**, то время t **= 1.5 с**.

1.12.5. Натуральные логарифмы

Логарифмы по основанию e называют ***натуральными логарифмами***. Натуральный логарифм x записывается как $\log_e x$ или, что встречается чаще, как $\ln x$.

1.12.6. Вычисление натуральных логарифмов

Величину натурального логарифма можно определить, используя:

- калькулятор,
- взаимосвязь между обычными и натуральными логарифмами,
- таблицы натуральных логарифмов.

Наиболее распространенный метод вычисления натуральных логарифмов — использование инженерного *калькулятора,* который сегодня заменил четырехзначные таблицы, а также по формуле

$$\log_e y = 2.3026 \log_{10} y.$$

Большинство инженерных калькуляторов имеют функцию «$\ln x$», которая позволяет получить значение натурального логарифма числа при нажатии соответствующей кнопки. Подсчитаем с помощью калькулятора:

$\ln 4.692 = 1.5458589... = 1.5459$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки

и $\ln 35.78 = 3.57738907... = 3.5774$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Проверьте с помощью калькулятора следующие значения:

$\ln 1.732 = 0.54928$ с точностью до 5 значащих цифр,
$\ln 1 = 0$,
$\ln 1750 = 7.4674$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки,
$\ln 0.00032 = -8.04719$ с точностью до 6 значащих цифр,
$\ln e^3 = 3$,
$\ln e^1 = 1$.

Из последних двух примеров можно сделать вывод, что

$$\mathbf{\log_e e^x = x.}$$

Это свойство может быть полезным при решении уравнений, содержащих экспоненциальные функции.

Пример. Чтобы решить показательное уравнение $e^{3x} = 8$, возьмем натуральный логарифм от обеих частей. В итоге получаем

$$\ln e^{3x} = \ln 8,$$
$$3x = \ln 8.$$

Откуда $x = \frac{1}{3}\ln 8 = \mathbf{0.6931}$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

1.12.7. Законы роста и затухания

Законы экспоненциального роста и затухания имеют форму $y = Ae^{-kx}$ и $y = A(1 - e^{-kx})$, где A и k — константы. Форма графиков этих уравнений показана на **Рис. 1.11**. Эти законы часто встречаются в науке и инженерных задачах:

$l = l_0 e^{\alpha\theta}$ — линейное расширение;

$R_\theta = R_0 e^{\alpha\theta}$ — зависимость электрического сопротивления от температуры;

$T_1 = T_0 e^{\mu\theta}$ — натяжение ремней;

$\theta = \theta_0 e^{-kt}$ — закон охлаждения Ньютона;

$y = y_0e^{kt}$ — биологический рост;

$q = Qe^{-t/CR}$ — разряд конденсатора;

$p = p_0e^{-h/c}$ — барометрическая формула;

$N = N_0e^{-\lambda t}$ — радиоактивный распад;

$i = Ie^{-Rt/L}$ — затухание тока в индуктивном контуре;

$i = I(1 - e^{-t/CR})$ — увеличение тока в емкостном контуре.

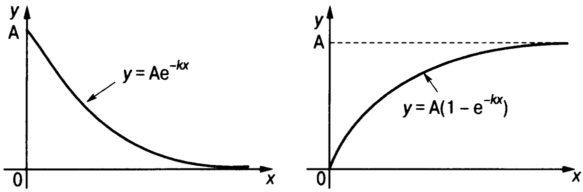


Рис. 1.11

Пример. Ток i ампер, протекающий через конденсатор в момент времени t секунд, определяется как $i = 8.0(1 - e^{-t/RC})$, где сопротивление схемы R составляет 25×10^3 Ом, а емкость C равна 16×10^{-6} Ф. Определить: а) ток i через 0.5 секунды и б) время, за которое ток достигнет величины 6.0 А с точностью до миллисекунды.

а) Ток $i = 8.0(1 - e^{-t/CR}) = 8.0[1 - e^{-0.5/(16\times10^{-6})(25\times10^{3})}] =$

$= 8.0(1 - e^{-1.25}) = 8.0(1 - 0.2865047\ldots) =$

$= 8.0(0.7134952...) = \mathbf{5.71\ A}$.

б) Преобразуя $i = 8.0(1 - e^{-t/CR})$, получаем $\frac{i}{8.0} = 1 - e^{-t/CR}$.

Откуда $e^{-t/CR} = 1 - \frac{i}{8.0} = \frac{8.0 - i}{8.0}$.

Берем для обеих частей обратную величину: $e^{t/CR} = \frac{8.0}{8.0 - i}$.

Берем натуральный логарифм от обеих частей:

$$\frac{t}{CR} = \ln\left(\frac{8.0}{8.0 - i}\right).$$

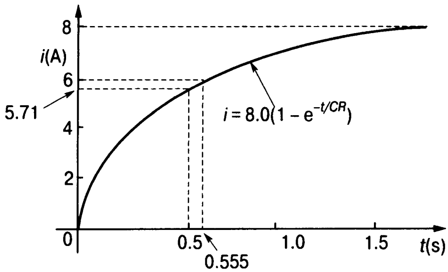


Рис. 1.12

Следовательно, при $i = 6.0$ А

$$t = CR\ln\left(\frac{8.0}{8.0-i}\right) = (16\times 10^{-6})(25\times 10^{3})\ln\left(\frac{8.0}{8.0-6.0}\right) =$$

$$= \frac{400}{10^3}\ln\left(\frac{8.0}{2.0}\right) = 0.4\ln 4.0 = 0.4(1.3862943\ldots) =$$

$= 0.5545$ с = **555 мс** с точностью до миллисекунды.

График зависимости тока от времени показан на **Рис. 1.12**.

1.13. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.13.1. Введение в теорию гиперболических функций

Функции, связанные с коническими сечениями — *гиперболами*, называются *гиперболическими функциями*. Область применения гиперболических функций включает теорию линий передач и цепных подвесок.

По определению:

- Гиперболический синус x:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{1}$$

- Гиперболический косинус x:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

- Гиперболический тангенс x:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{3}$$

- Гиперболический косеканс x:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \tag{4}$$

- Гиперболический секанс x:

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}. \qquad (5)$$

- Гиперболический котангенс x:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}. \qquad (6)$$

1.13.2. Некоторые свойства гиперболических функций

Подстановка 0 вместо x в выражение (1) дает:

$$\operatorname{sh}0 = \frac{e^{0}-e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Подстановка 0 вместо x в выражение (2) дает:

$$\operatorname{ch}0 = \frac{e^{0}+e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Если функция от x удовлетворяет равенству $f(-x) = -f(x)$ при всех x, то $f(x)$ называется *нечетной функцией* от x.

Замена x на $-x$ в выражении (1) дает:

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = -\operatorname{sh} x.$$

Замена x на $-x$ в выражении (3) дает:

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right) = -\operatorname{th} x.$$

Следовательно, **sh *x* и th *x*** — *нечетные функции*, так же как и

$$\operatorname{csch} x = \left(-\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right) \text{ и } \operatorname{cth} x = \left(-\frac{1}{\operatorname{th} x}\right).$$

Если функция от x при всех x удовлетворяет равенству $f(-x) = f(x)$, тогда $f(x)$ называется *четной функцией* от x.

Замена x на $-x$ в выражении (2) дает:

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Следовательно, **ch *x*** — *четная функция,* так же как и $\operatorname{sch} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

Проще всего вычислить гиперболические функции с помощью калькулятора. Многие инженерные калькуляторы имеют функции sh и ch, если же калькулятор не содержит таких функций, могут быть использованы приведенные выше определения.

Пример. Вычислить sh 5.4 с точностью до 4 значащих цифр.

$$\operatorname{sh} 5.4 = \frac{1}{2}(e^{5.4} - e^{-5.4}) = \frac{1}{2}(221.406416\ldots - 0.00451658\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}(221.401699\ldots) = \mathbf{110.7} \text{ с точностью до 4 значащих цифр.}$$

Пример. Вычислить sch 0.86 с точностью до 4 значащих цифр.

$$\operatorname{sch} 0.86 = \frac{1}{\operatorname{ch} 0.86} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{0.86} + e^{-0.86})} =$$

$$= \frac{2}{(2.363166069\ldots + 0.42316208\ldots)} = \frac{2}{2.78632277\ldots} = \mathbf{0.7178}.$$

1.13.3. Графики гиперболических функций

На **Рис. 1.12** показан график функции $\boldsymbol{y = \operatorname{sh} x}$. Функция $\operatorname{sh} x$ является *нечетной,* поскольку ее график симметричен относительно начала координат.

График функции $\boldsymbol{y = \operatorname{ch} x}$ показан на **Рис. 1.13**. График симметричен относительно оси y. Следовательно, $\operatorname{ch} x$ — *четная функция.* Форма $y = \operatorname{ch} x$ напоминает тяжелый трос, свободно провисающий под действием силы тяжести, и называется *цепной линией.* Примеры использования функции включают линии передачи, телеграфные провода, подвесные мосты, она также применяется при проектировании крыш и арок. Графики $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{csch} x$, $y = \operatorname{sch} x$ и $y = \operatorname{cth} x$ показаны на **Рис. 1.14** и **1.15**.

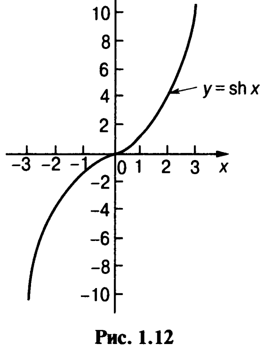


Рис. 1.12

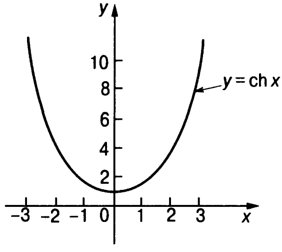
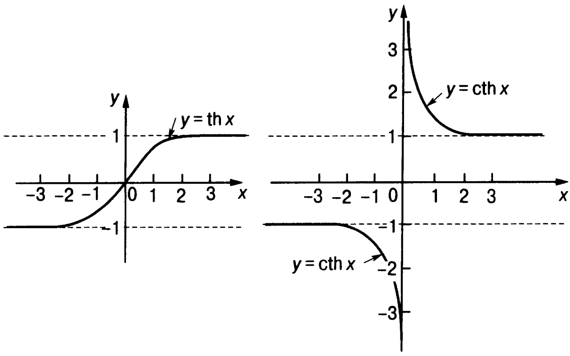
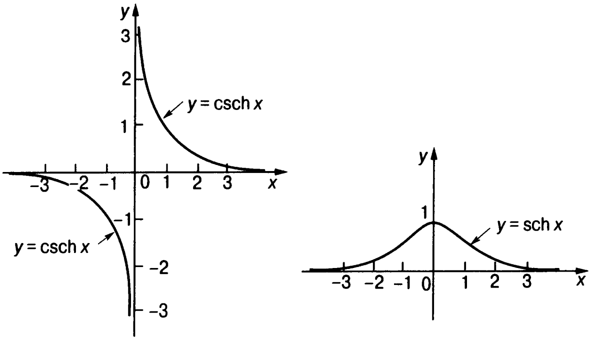


Рис. 1.13



а) б)

Рис. 1.14



а) б)

Рис. 1.15

Функции $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{csch} x$ симметричны относительно начала координат, следовательно, они являются нечетными функциями. График $y = \operatorname{sch} x$ симметричен относительно оси y, значит, это *четная функция*.

1.13.4. Гиперболические тождества

Для каждого тригонометрического тождества существует соответствующее гиперболическое тождество. *Гиперболические тождества* можно получить:

- Заменяя $\operatorname{sh} x$ на $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x$ на $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- При использовании *правила Осборна*, которое гласит:

> ***Шесть используемых в тригонометрических тождествах тригонометрических отношений, верных для произвольных углов, могут быть заменены соответствующими гиперболическими функциями, но при этом необходимо изменить на противоположный знак любого прямого или косвенного результата произведения двух синусов.***

Пример. Поскольку $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, следовательно, по правилу Осборна $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, т. е. тригонометрические функции заменены на соответствующие гиперболические функции, и поскольку $\sin^2 x$ — результат произведения двух синусов, то знак меняется с + на –. **В Табл. 1.2** приведены некоторые тригонометрические тождества и соответствующие им гиперболические тождества.

Таблица 1.2

Тригонометрическое тождество	Соответствующее гиперболическое тождество
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
$1 + \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \mathrm{sch}^2 x$
$\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x$	$\mathrm{cth}^2 x - 1 = \mathrm{csch}^2 x$
Формулы сложения углов	
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\mathrm{sh}(A \pm B) = \mathrm{sh}\, A\, \mathrm{ch}\, B \pm \mathrm{ch}\, A\, \mathrm{sh}\, B$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos(B \mp \sin A \sin B)$	$\mathrm{ch}(A \pm B) = \mathrm{ch}\, A\, \mathrm{ch}\, B \pm \mathrm{sh}\, A\, \mathrm{sh}\, B$
$\mathrm{tg}(A \pm B) = \dfrac{\mathrm{tg} A \pm \mathrm{tg} B}{1 \mp \mathrm{tg} A\, \mathrm{tg} B}$	$\mathrm{th}(A \pm B) = \dfrac{\mathrm{th} A \pm \mathrm{th} B}{1 \pm \mathrm{th} A\, \mathrm{th} B}$
Формулы двойных углов	
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\mathrm{sh} 2x = 2 \mathrm{sh} x \mathrm{ch} x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$	$\mathrm{ch} 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x =$
$= 2\cos^2 x - 1 =$	$= 2\mathrm{ch}^2 x - 1 =$
$= 1 - 2\sin^2 x$	$= 1 + 2\mathrm{sh}^2 x$
$\mathrm{tg} 2x = \dfrac{2 \mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$	$\mathrm{th} 2x = \dfrac{2 \mathrm{th} x}{1 + \mathrm{th}^2 x}$

1.13.5. Решение уравнений, содержащих гиперболические функции

Уравнения вида $a\, \mathrm{ch}\, x + b\, \mathrm{sh}\, x = c$, где a, b и c — константы, можно решить следующими способами.

Способ 1. Построить графики $a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = c$ и $y = c$ и определить точки пересечения. Более точен второй способ.

Способ 2. Использовать следующую процедуру:

- Заменить $\mathrm{sh}\,x$ на $\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ и $\mathrm{ch}\,x$ на $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.
- Привести уравнение к виду $pe^x + qe^x + r = 0$, где p, q и r — константы.
- Умножить каждый член на e^x, в итоге получается уравнение вида $p(e^x)^2 + re^x + q = 0$, поскольку $(e^{-x})(e^x) = e^0 = 1$.
- Решить квадратное уравнение $p(e^x)^2 + re^x + q = 0$ относительно e^x, разложив уравнение на множители или используя формулу корней.
- Если $e^x = a$ есть константа, полученная из решения предыдущего уравнения, взять натуральный логарифм от обеих частей выражения $e^x = a$; в итоге получается $x = \ln(\mathrm{const})$.

Пример. Решить уравнение $2.6\mathrm{ch}\,x + 5.1\mathrm{sh}\,x = 8.73$ с точностью до 4 знаков после запятой.

Согласно описанной выше процедуре

$$2.6\,\mathrm{ch}\,x + 5.1\,\mathrm{sh}\,x = 8.73,$$

т. е.

$$2.6\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + 5.1\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 8.73\,.$$

Значит,

$$1.3e^x + 1.3e^{-x} + 2.55e^x - 2.55e^{-x} = 8.73,$$
$$3.85e^x - 1.25e^{-x} - 8.73 = 0.$$

Умножим на e^x:

$$3.85(e^x)^2 - 8.73e^x - 1.25 = 0,$$

$$e^x = \frac{-(-8.73) \pm \sqrt{[(8.73)^2 - 4(3.85)(-1.25)]}}{2(3.85)} =$$

$$= \frac{8.73 \pm \sqrt{95.463}}{7.70} = \frac{8.73 \pm 9.7705}{7.70}\,.$$

Следовательно, $e^x = 2.4027$ или $e^x = -0.1351$.

$x = \ln 2.4027$ и $x = \ln(-0.1351)$ (второе значение не имеет смысла).

Итак, $\boldsymbol{x = 0.8766}$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

1.13.6. Разложение в ряд ch x и sh x

По определению из разд. 1.12,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\,.$$

Подстановка $-x$ вместо x дает:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots\right)\right].$$

Итак, $\mathbf{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ (что верно для любого значения x).

Функция $\operatorname{ch} x$ — четная, поэтому содержит только четные степени x.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots\right)\right].$$

Итак, $\mathbf{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ (что верно для любого значения x).

Функция $\operatorname{sh} x$ — нечетная, поэтому содержит только нечетные степени x.

1.14. ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Согласно правилам алгебраического сложения

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) + 3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{4x-5}{x^2-x-2}.$$

Обратный процесс перехода от $\frac{4x-5}{x^2-x-2}$ к $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$ называется *разложением на простейшие дроби.*

Чтобы разложить алгебраическое выражение на простейшие дроби, необходимо:

1. Разложить на множители знаменатель (в приведенном выше примере $x^2 - x - 2$ разлагается на множители: $(x - 2)(x + 1)$).

2. Максимальный показатель степени в числителе должен быть хотя бы на единицу меньше, чем в знаменателе (в приведенном выше примере $(4x - 5)$ содержит максимальный показатель степени 1 — это показатель при x (x^1), а максимальный показатель степени в $(x^2 - x - 2)$ — это 2).

Если максимальный показатель степени в числителе равен максимальному показателю степени в знаменателе, числитель следует делить на знаменатель до тех пор, пока показатель степени числителя не станет меньше показателя степени знаменателя.

Существует три основных типа простейших дробей. Используемые формы простейших дробей приведены в **Табл. 1.3**, где предполагается, что $f(x)$ имеет большую степень, чем соответствующий знаменатель, а A, B и C — искомые константы.

Таблица 1.3

Тип	**Знаменатель содержит**	**Выражение**	**Вид простейшей дроби**
1	Линейные множители	$\dfrac{f(x)}{(x+a)(x-b)(x+c)}$	$\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x+c}$
2	Повторяемые линейные множители	$\dfrac{f(x)}{(x+a)^3}$	$\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}+\dfrac{C}{(x+a)^3}$
3	Простейшие множители	$\dfrac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(x+d)}$	$\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\dfrac{C}{x+d}$

(В общем случае $ax^2 + bx + c$ — это квадратичное выражение, которое нельзя разложить на множители без использования иррациональных или мнимых чисел.)

Разложение алгебраического выражения на простейшие дроби предваряет интегрирование некоторых функций (см. разд. 10.4).

Пример. Разложить на простейшие дроби $\dfrac{11-3x}{x^2+2x-3}$.

После разложения знаменатель имеет вид $(x-1)(x+3)$, степень числителя меньше степени знаменателя. Таким образом, $\dfrac{11-3x}{x^2+2x-3}$ можно разложить на простейшие дроби.

Пусть $\dfrac{11-3x}{x^2+2x-3} \equiv \dfrac{11-3x}{(x-1)(x+3)} \equiv \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x+3)}$, где A и B — искомые константы. По правилам алгебраического сложения $\dfrac{11-3x}{(x-1)(x+3)} \equiv \dfrac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$.

В обеих частях тождества знаменатели одинаковы, следовательно, числители равны. Итак, $11-3x \equiv A(x+3)+B(x-1)$.

Чтобы определить константы A и B, подбирают такие величины x, при которых множитель при A или B равен нулю.

При $x = 1$ имеем $11-3(1) \equiv A(1+3)+B(0)$, т. е. $8 = 4A$.
Итак, $\boldsymbol{A = 2}$.

При $x = -3$ имеем $11 - 3(3) \equiv A(0) + B(-3-1)$, т. е. $20 = -4B$. Итак, $\mathbf{B = -5}$.

Итак, $\dfrac{\mathbf{11-3x}}{\mathbf{x^2+2x-3}} \equiv \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{(x-1)}} + \dfrac{\mathbf{-5}}{\mathbf{(x+3)}} \equiv \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{(x-1)}} - \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{(x+3)}}$.

Проверка. $\dfrac{2}{(x-1)} - \dfrac{5}{(x+3)} = \dfrac{2(x+3)-5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{11-3x}{x^2+2x-3}$.

Пример. Выразить в виде простейших дробей $\dfrac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}$.

Максимальный показатель степени в числителе больше, чем в знаменателе. Проводим деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-4x-4 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+x^2-2x} & x-3 \\ -3x^2-2x-4 & \\ \underline{-3x^2-3x+6} & \\ x-10 & \end{array}$$

То есть

$$\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2} \equiv \left(x-3+\frac{x-10}{x^2+x-2}\right) \equiv x-3+\frac{x-10}{(x+2)(x-1)}.$$

Пусть $\dfrac{x-10}{(x+2)(x-1)} \equiv \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{B}{(x-1)} \equiv \dfrac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$.

Приравниваем числители: $x - 10 \equiv A(x-1) + B(x+2)$.
Пусть $x = -2$. Тогда $-12 = -3A$. Итак, $\mathbf{A = 4}$.
Пусть $x = -1$. Тогда $-9 = 3B$. Итак, $\mathbf{B = -3}$.

Следовательно, $\dfrac{x-10}{(x+2)(x-1)} \equiv \dfrac{4}{(x+2)} - \dfrac{3}{(x-1)}$.

Таким образом, $\dfrac{\mathbf{x^3-2x^2-4x-4}}{\mathbf{x^2+x-2}} \equiv \mathbf{x-3} + \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{(x+2)}} - \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{(x-1)}}$.

Пример. Выразить в виде суммы трех простейших дробей $\dfrac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}$.

Знаменатель содержит комбинацию линейного множителя и повторяющегося линейного множителя.

Пусть по правилам алгебраического сложения

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2} \equiv \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}.$$

Приравнивание числителей дает:

$$5x^2 - 2x - 19 \equiv A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3). \qquad (1)$$

Пусть $x = -3$. Тогда

$$5(-3)^2 - 2(-3) - 19 \equiv A(-4) + B(0)(-4) + C(0).$$

То есть $32 = 16A$. Итак, $\boldsymbol{A = 2}$.

Пусть $x = 1$. Тогда $5(1)^2 - 1(1) - 19 \equiv A(0)^2 + B(4)(0) + C(4)$. То есть $-16 = 4C$. Итак, $\boldsymbol{C = -4}$.

Не вычисляя правую часть уравнения (1), можно увидеть, что приравнивание коэффициентов при x^2 дает $5 = A + B$, значит, $A = 2$, $B = 3$.

Следовательно, $\dfrac{\boldsymbol{5x^2 - 2x - 19}}{\boldsymbol{(x+3)(x-1)^2}} \equiv \dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(x+3)}} + \dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{(x-1)}} - \dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{(x-1)^2}}$.

Пример. Разложить на простейшие дроби $\dfrac{3 + 6x + 4x^2 - 2x^3}{x^2(x^2+3)}$.

Члены типа x^2 можно рассматривать как $(x + 0)^2$, т. е. это повторяющийся линейный множитель. $(x^2 + 3)$ — квадратичный двучлен, который не разлагается на множители без использования иррациональных и комплексных чисел. Пусть

$$\frac{3 + 6x + 4x^2 - 2x^3}{x^2(x^2+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+3)} \equiv$$

$$\equiv \frac{Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}.$$

Приравниваем числители:

$$3 + 6x + 4x^2 - 2x^3 \equiv Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 \equiv$$

$$\equiv Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2.$$

Пусть $x = 0$. Тогда $3 = 3B$. Итак, $\boldsymbol{B = 1}$.

Приравниваем коэффициенты при x^3:

$$-2 = A + C. \qquad (1)$$

Приравниваем коэффициенты при x^2: $4 = B + D$.

Поскольку $\boldsymbol{B = 1}$, то $\boldsymbol{D = 3}$.

Приравниваем коэффициенты при x: $6 = 3A$. Итак, $\mathbf{A = 2}$. Из уравнения (1) при $A = 2$ находим $\mathbf{C = -4}$.

Следовательно, $\dfrac{3 + 6x + 4x^2 - 2x^3}{x^2(x^2 + 3)} \equiv \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 3}$.

1.15. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.15.1. Простые последовательности

Набор чисел, полученных последовательным применением определенного правила, называется *числовой последовательностью.* Каждое число последовательности называется *членом* последовательности.

Например: 1, 3, 5, 7, ... — это последовательность, полученная прибавлением 2 к каждому предыдущему члену, а 2, 8, 32, 128, ... — последовательность, полученная умножением каждого предыдущего члена на 4.

Пример. Найти следующие три члена последовательности 9, 5, 1, ... Заметим, что каждый следующий член последовательности 9, 5, 1, ... меньше предыдущего на 4, таким образом, следующие два члена — это $1 - 4$, т. е. -3, и $-3 - 4$, т. е. -7.

Пример. Найти следующие два члена последовательности 2, 6, 18, 54, ... Заметим, что второй член, 6, в три раза больше первого, третий, 18, — в три раза больше второго, а четвертый член, 54, в три раза больше третьего. Следовательно, пятый член будет равен $3 \times 54 = \mathbf{162}$, а шестой — $3 \times 162 = \mathbf{486}$.

1.15.2. *n*-й член последовательности

Если последовательность представлена общей формулой, скажем, $2n + 1$, где n — целое, тогда, подставляя $n = 1, 2, 3...$, можно определить члены последовательности; в данном примере первые три члена суть: $2\cdot1+1$; $2\cdot2+1$; $2\cdot3+1$, ...; т. е. 3, 5, 7, ...

Что такое n-й член последовательности 1, 3, 5, 7, ...? Для начала отметим, что разности между каждыми двумя соседними членами равны 2, следовательно, связывающий числа закон — это

$$2n + \text{некоторое число.}$$

Второй член $3 = 2n +$ некоторое число.

Следовательно, при $n = 2$ (т. е. второй член последовательности) $3 = 4 +$ некоторое число, и это некоторое число должно равняться -1. Таким образом, ***n*-й член последовательности 1, 3, 5, 7, ... — это $\mathbf{2n - 1}$**. Следовательно, пятый член определяется как $2\cdot5 - 1 = 9$, двадцатый член — это $2\cdot20 - 1 = 39$ и так далее.

1.15.3. Арифметические прогрессии

Если для последовательности характерна постоянная величина разности между соседними членами, она называется *арифметической прогрессией.* Примеры арифметической прогрессии:

1. 1, 4, 7, 10, 13, ..., где разность (модуль) арифметической прогрессии равна 3;

2. a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ..., где разность арифметической прогрессии равна d.

Если первый член арифметической прогрессии a, и модуль прогрессии d, тогда n-й член дается выражением

$$\boxed{a+(n-1)d}$$

В первом примере седьмой член определяется как $1 + (7 - 1)3 = 19$, что можно легко проверить.

Сумма арифметической прогрессии S может быть получена при умножении среднего арифметического всех членов на количество членов.

Среднее всех членов есть $\frac{a+l}{2}$, где a — первый член, а l — последний член, т. е. $l = a + (n - 1)d$ для n членов.

Тогда сумма n членов

$$S_n = n\left(\frac{a+l}{2}\right) = \frac{n}{2}\{a+[a+(n-1)d]\}.$$

Итак,

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

Пример. Сумма первых 7 членов ряда 1, 4, 7, 10, 13, ... (где $a = 1$ и $d = 3$) определяется как

$$S_7 = \frac{7}{2}[2(1)+(7-1)3] = \frac{7}{2}[2+18] = \frac{7}{2}[20] = \mathbf{70}.$$

Пример. Определить: а) девятый и б) шестнадцатый члены последовательности 2, 7, 12, 17, ...

2, 7, 12, 17,... — арифметическая прогрессия с модулем $d = 5$.

а) n-й член арифметической прогрессии определяется как

$$a + (n - 1)d.$$

Первый член $a = 2$, $d = 5$ и $n = 9$, тогда девятый член равен $2 + (9 - 1)5 = 2 + (8)(5) = 2 + 40 = \mathbf{42}$.

б) 16-й член – это $2 + (16 - 1)5 = 2 + (15)(5) = 2 + 75 = \mathbf{77}$.

1.15.4. Геометрические прогрессии

Если между соседними членами последовательности существует постоянное отношение, она называется *геометрической прогрессией*. Постоянное отношение называется *знаменателем геометрической прогрессии, r*.

Примеры геометрической прогрессии:

1, 2, 4, 8, ..., где знаменатель равен 2;

$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots$, где знаменатель равен r. Тогда n-й член b_n определяется формулой

$$\boxed{b_n = ar^{n-1}}$$

что может быть легко проверено с помощью приведенных выше примеров.

Например, восьмой член геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8... — это $1 \cdot 2^7 = 128$, поскольку $a = 1$ и $r = 2$.

Сумма n членов

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}}, \text{ что верно при } r < 1$$

или

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}}, \text{ что верно при } r > 1.$$

Пример. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8,16, ... (где $a = 1$ и $r = 2$) определяется формулой

$$S_8 = \frac{1(2^8-1)}{(2-1)}.$$

Итак, $S_8 = \dfrac{1(256-1)}{1} = \mathbf{255}$.

Если знаменатель геометрической прогрессии r меньше единицы, то сумма n членов $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$, что можно записать в виде $S_n = \dfrac{a}{(1-r)} - \dfrac{ar^n}{(1-r)}$.

Поскольку $r < 1$, при увеличении n r уменьшается, т. е. $r^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Величина $\dfrac{a}{(1-r)}$ называется суммой бесконечной геометрической прогрессии S_∞, она ограничивает значение суммы бесконечного количества членов прогрессии, т. е.

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{(1-r)}},$$

что верно при $-1 < r < 1$.

Пример. Сумма геометрической прогрессии $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ равняется $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, поскольку $a = 1$ и $r = \frac{1}{2}$. Итак, $S_\infty = 2$.

Пример. Фирма, дающая напрокат инструменты, обнаружила, что ее чистая прибыль за год от проката определенного инструмента ежегодно уменьшается на 10%. Чистый доход с определенного инструмента в этом году составил 400 фунтов. Определим всю возможную прибыль от проката этого инструмента в будущем (предполагаем, что инструмент вечен).

Чистая прибыль образует следующую последовательность: 400 фунтов + 400 фунтов $\times$ 0.9 + 400 фунтов $\times$ 0.9^2 + ..., которая является геометрической прогрессией с $a = 400$ и $r = 0.9$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{400}{(1-0.9)} = \mathbf{4000} = \textbf{полная будущая прибыль}.$$

Пример. Сверлильный станок должен иметь диапазон скоростей от 50 до 750 оборотов в минуту. Определим значения скоростей, каждую с точностью до ближайшего целого числа, при условии, что скорости образуют геометрическую прогрессию.

Пусть геометрическая прогрессия из n членов задается как a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}.

Первый член $a = 50$ оборотов в минуту.

Шестой член определяется как ar^{6-1}, это 750 оборотов в минуту, т. е. $ar^5 = 750$, откуда $r^5 = \frac{750}{a} = \frac{750}{50} = 15$.

Таким образом, знаменатель геометрической прогрессии $r = \sqrt[5]{15} = 1.7188$.

Первый член $a = 50$,
второй член $ar = (50)(1.7188) = 85.94$,
третий член $ar^2 = (50)(1.7188)^2 = 147.71$,
четвертый член $ar^3 = (50)(1.7188)^3 = 253.89$,
пятый член $ar^4 = (50)(1.7188)^4 = 436.39$,
шестой член $ar^5 = (50)(1.7188)^5 = 750.06$.

Следовательно, шесть скоростей сверлильного станка суть 50, 86, 148, 254, 436 и 750 оборотов в минуту с точностью до ближайшего целого числа.

1.16. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

1.16.1. Треугольник Паскаля

Биномиальное выражение — это выражение, содержащее два члена, соединенных знаком «плюс» или «минус». Таким образом, $(p + q)$, $(a + x)^2$, $(2x + y)^3$ — это примеры биномиальных выражений. Определение $(a + x)^n$ для целых значений n от 0 до 6 дает следующий результат:

$$
\begin{aligned}
(a+x)^0 &= && 1\\
(a+x)^1 &= && a+x\\
(a+x)^2 &= (a+x)(a+x) = && a^2+2ax+x^2\\
(a+x)^3 &= (a+x)^2(a+x) = && a^3+3a^2x+3ax^2+x^3\\
(a+x)^4 &= (a+x)^3(a+x) = && a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4\\
(a+x)^5 &= (a+x)^4(a+x) = && a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5\\
(a+x)^6 &= (a+x)^5(a+x) = && a^6+6a^5x+15a^4x^2+20a^3x^3+15a^2x^4+6ax^5+x^6
\end{aligned}
$$

Из полученных результатов можно вывести следующие закономерности:

- Показатель степени при a уменьшается, если двигаться слева направо.
- Показатель степени при x возрастает, если двигаться слева направо.
- Коэффициенты при каждом члене разложения симметричны относительно среднего коэффициента, если n — четное, и симметричны относительно двух средних коэффициентов, если n — нечетное.
- Коэффициенты показаны отдельно в **Табл. 1.4**, эта форма записи известна как *треугольник Паскаля*. Коэффициент при некотором члене может быть получен сложением двух предыдущих соседних коэффициентов в предшествующем ряду. Это правило показано треугольниками в **Табл. 1.4**, где, например, $1 + 3 = 4$, $10 + 5 = 15$ и так далее.

Таблица 1.4

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+x)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(a+x)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+x)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+x)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+x)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+x)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(a+x)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

- Метод треугольника Паскаля используется для выражений вида $(a + x)^n$ при значениях n меньше 8.

Пример. Используя метод треугольника Паскаля, определим разложение $(a + x)^n$.

Из **Табл. 1.4** ряд треугольника Паскаля, соответствующий $(a + x)^6$ — это строка (1), приведенная ниже. Сложение соседних коэффициентов для $(a + x)^7$ дает приведенную ниже строку (2).

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \tag{1}$$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \tag{2}$$

Первый и последний члены в разложении $(a + x)^7$ — это a^7 и x^7 соответственно.

При движении слева направо степенные показатели при a уменьшаются, а при x — увеличиваются.

$$(a+x)^7 =$$

$$= \boldsymbol{a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7}.$$

1.16.2. Биномиальное разложение

Биномиальное разложение или *биномиальная теорема* — это формула для возведения биномиального выражения в любую степень без длительного умножения. Основное биномиальное разложение для $(a + x)^n$ имеет вид

$$\boxed{(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \ldots + x^n}$$

где 3! означает $3 \times 2 \times 1$ и называется 3 факториал .

В биномиальной теореме n может быть дробью, десятичной дробью и положительным или отрицательным целым.

В основном разложении $(a + x)^n$ можно заметить, что четвертый член есть $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$. В данном выражении число 3 очевидно. В любом члене биномиального разложения, скажем в r-м, заметно число $(r - 1)$.

Следовательно, можно утверждать, что r-й член разложения $(a + x)^n$ выглядит следующим образом:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{ до } (r-1) \text{ членов}}{(r-1)!}a^{n-(r-1)}x^{r-1}.$$

При $a = 1$ биномиальное разложение $(a + x)^n$ приобретает вид

$$\boxed{(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots}$$

Оно верно при $-1 < x < 1$.

Если x мало по сравнению с 1, то $(a + x)^n \approx 1 + nx$.

Пример. Определить разложение $(2 + x)^7$, используя биномиальную теорему.

При $a = 2$, $n = 7$ биномиальное разложение имеет вид

$$(2+x)^7 = 2^7+7(2)^6x+\frac{(7)(6)}{(2)(1)}(2)^5x^2+\frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)(1)}(2)^4x^3+$$

$$+\frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)}(2)^3x^4+\frac{(7)(6)(5)(4)(3)}{(5)(4)(3)(2)(1)}(2)^2x^5+$$

$$+\frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}(2)x^6+\frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}x^7.$$

Итак,

$$(2+x)^7 = \mathbf{128+448x+672x^2+560x^3+280x^4+84x^5+14x^6+x^7}.$$

Пример. Используя биномиальное разложение, разложить $\frac{1}{(1+2x)^3}$ в порядке возрастания степеней x до члена x^3.

Используем биномиальное разложение $(1 + x)^n$, где $n = -3$, а x заменяем на $2x$:

$$\frac{1}{(1+2x)^3} = (1+2x)^{-3} = 1+(-3)(2x)+\frac{(-3)(-4)}{2!}(2x)^2+$$

$$+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}(2x)^3+\ldots = \mathbf{1-6x+24x^2-80x^3}+\ldots.$$

Разложение верно при условии, что $|2x| < 1$, т. е. $|x| < \frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Пример. Упростить $\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}\sqrt{(1+x)}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^3}$ при условии, что членами степени выше единицы можно пренебречь.

$$\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}\sqrt{(1+x)}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^3} = (1-3x)^{1/3}(1+x)^{1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3},$$

что при разложении по биномиальной теореме только до членов, содержащих x в первой степени, приближенно равно

$$\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)(-3x)\right]\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)(x)\right]\left[1+(-3)\left(\frac{x}{2}\right)\right]\approx$$

$$\approx(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)1-\frac{3x}{2}\approx\left(1-x+\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right).$$

Если пренебречь членами со степенями x выше единицы, получим $(\mathbf{1}-\mathbf{2}x)$.

1.16.3. Практические задачи с применением биномиальной теоремы

Биномиальные разложения можно использовать для числовых аппроксимаций, для вычислений с малыми отклонениями и в теории вероятностей.

Пример. Момент инерции площади прямоугольника относительно его центральной точки определяется как $\frac{bl^3}{12}$. Найдем приблизительное изменение момента инерции площади при увеличении b на 3.5% и уменьшении l на 2.5%.

Новые значения b и l суть $(1 + 0.035)b$ и $(1 - 0.025)l$ соответственно.

Новый момент инерции площади равен

$$\frac{1}{12}[(1+0.035)b][(1-0.025)l] = \frac{bl^3}{12}(1+0.035)(1-0.025)^3;$$

пренебрегая старшими степенями малых членов, приближенно получим

$$\frac{bl^3}{12}(1+0.035)(1-0.025)^3 \approx \frac{bl^3}{12}(1+0.035)(1-0.075);$$

пренебрегая произведениями малых членов, получим

$$\frac{bl^3}{12}(1+0.035-0.075) \approx \frac{bl^3}{12}(1-0.040)\approx(0.96)\frac{bl^3}{12}.$$

Итак, это 96% от исходного момента инерции площади.

Следовательно, **момент инерции площади уменьшился приблизительно на 4%.**

1.17. РЯДЫ МАКЛОРЕНА

1.17.1. Введение

Некоторые математические функции могут быть представлены в виде степенных рядов, содержащих степени переменной в порядке возрастания. Например:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots ,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

При использовании рядов, называемых *рядами Маклорена,* смешанные функции, содержащие, скажем, алгебраические, тригонометрические и экспоненциальные функции, могут быть выражены в виде чисто алгебраических функций. С помощью рядов зачастую можно быстро осуществить дифференцирование и интегрирование.

Теорема Маклорена (ряд Маклорена) имеет вид

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots} \qquad (1)$$

1.17.2. Условия применения рядов Маклорена

Ряды Маклорена можно использовать для представления любой функции, скажем $f(x)$, в виде степенного ряда, если удовлетворены три условия:

1. $\boldsymbol{f(0) \neq \infty}$.

Например, для функции $f(x) = \cos x$, $f(0) = \cos 0 = 1$, таким образом, $\cos x$ удовлетворяет данному условию. Однако, если $f(x) = \ln x$, то $f(0) = \ln (0) = -\infty$; значит, $\ln x$ данному условию не удовлетворяет.

2. $\boldsymbol{f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots \neq \infty}$.

Например, для функции $f(x) = \cos x$: $f'(0) = -\sin 0 = 0, f''(0) = -\cos 0 = -1$ и так далее, таким образом, $\cos x$ удовлетворяет данному условию. Однако если $f(x) = \ln x$, то $f'(x) = \frac{1}{0} = \infty$, значит, $\ln x$ данному условию не удовлетворяет.

3. ***Полученный ряд Маклорена должен быть сходящимся.***

В общем это означает, что значения членов или групп членов должны постепенно уменьшаться, и сумма членов должна стремиться к предельному значению. Например, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ сходится, поскольку значения членов становятся все меньше, а сумма членов стремится к предельному значению 2.

1.17.3. Примеры по рядам Маклорена с решениями

Пример. Определить первые четыре члена степенного ряда для $\cos x$.

Находим значения $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$,... в ряду Маклорена следующим образом:

$f(x) = \cos x$, $\quad f(0) = \cos 0 = 1$,

$f'(x) = -\sin x$, $\quad f'(0) = -\sin 0 = 0$,

$f''(x) = -\cos x$, $\quad f''(0) = -\cos 0 = -1$,

$f'''(x) = \sin x$, $\quad f'''(0) = \sin 0 = 0$,

$f^{iv}(x) = \cos x$, $\quad f^{iv}(0) = \cos 0 = 1$,

$f^{v}(x) = -\sin x$, $\quad f^{v}(0) = -\sin 0 = 0$,

$f^{vi}(x) = -\cos x$, $\quad f^{vi}(0) = -\cos 0 = 1$.

Подставляем эти значения в уравнение (1):

$$f(x) = \cos x = 1 + x(0) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + $$
$$+ \frac{x^5}{5!}(0) + \frac{x^6}{6!}(-1) + \dots .$$

Итак, $\mathbf{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}$.

Пример. Определить степенной ряд для $\cos 2\theta$.

Подставляем в полученный в предыдущем примере ряд 2θ вместо x:

$$\cos 2\theta = 1 - \frac{(2\theta)^2}{2!} + \frac{(2\theta)^4}{4!} - \frac{(2\theta)^6}{6!} + \dots =$$
$$= 1 - \frac{4\theta^2}{2} + \frac{16\theta^4}{24} - \frac{64\theta^6}{720} + \dots .$$

Итак, $\mathbf{\cos 2\theta = 1 - 2\theta^2 + \frac{2}{3}\theta^4 - \frac{4}{45}\theta^6 + \dots}$.

Пример. Разложить $\ln(x + 1)$ с точностью до пяти членов.

$f(x) = \ln(1+x)$, $\quad f(0) = \ln(1+0) = 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)}$, $\quad f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$,

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $\quad f''(0) = \dfrac{-1}{(1+0)^2} = -1$,

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2,$$

$$f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \qquad f^{iv}(0) = \frac{-6}{(1+0)^4} = -6,$$

$$f^{v}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}, \qquad f^{v}(0) = \frac{24}{(1+0)^5} = 24.$$

Подставляем эти значения в уравнение (1):

$$f(x) = \ln(1+x) = 0 + x(1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(2) +$$

$$+ \frac{x^4}{4!}(-6) + \frac{x^5}{5!}(24).$$

Итак, $\mathbf{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}} - \ldots$.

1.17.4. Численное интегрирование с использованием рядов Маклорена

Значения многих интегралов нельзя найти с помощью каких-либо аналитических методов. В разд. 10.8 для численного вычисления таких интегралов используются формула трапеций, правило деления отрезка пополам и *формула Симпсона*. Другой метод нахождения числового значения определенного интеграла — выражение функции в виде *ряда Маклорена* с последующим поочередным интегрированием каждого члена.

Пример. Вычислить $\int_{0.1}^{0.4} 2e^{\sin\theta} d\theta$ с точностью до 3 значащих цифр.

Степенной ряд для $e^{\sin\theta}$ можно получить, используя ряд Маклорена:

$$f(\theta) = e^{\sin\theta}, \qquad f(0) = e^{\sin 0} = e^0 = 1;$$

$$f'(\theta) = \cos\theta e^{\sin\theta}, \qquad f'(0) = \cos 0 e^{\sin 0} = (1)e^0 = 1;$$

$$f''(\theta) = \cos\theta\cos\theta e^{\sin\theta} + (e^{\sin\theta})(-\sin\theta) = e^{\sin\theta}(\cos^2\theta - \sin\theta),$$

$$f''(0) = e^0(\cos^2 0 - \sin 0) = 1;$$

$$f'''(\theta) = (e^{\sin\theta})[(2\cos\theta(-\sin\theta) - \cos\theta] + (\cos^2\theta - \sin\theta)\cos\theta e^{\sin\theta} =$$

$$= e^{\sin\theta}\cos\theta[-2\sin\theta - 1 + \cos^2\theta - \sin\theta],$$

$$f'''(0) = e^0\cos 0[(0-1+1-0)] = 0.$$

Тогда из выражения (1) следует:

$$e^{\sin\theta} = f(0) + \theta f'(0) + \frac{\theta^2}{2!}f''(0) + \frac{\theta^3}{3!}f'''(0) + \ldots = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} + 0.$$

Итак, $\int\limits_{0.1}^{0.4} 2e^{\sin\theta}d\theta = \int\limits_{0.1}^{0.4} 2\left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2}\right)d\theta = \int\limits_{0.1}^{0.4}(2 + 2\theta + \theta^2)d\theta =$

$= \left[2\theta + \frac{2\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}\right]_{0.1}^{0.4} = \left(0.8 + (0.4)^2 + \frac{(0.4)^3}{3}\right) - \left(0.2 + (0.1)^2 + \frac{(0.1)^3}{3}\right) =$

$= 0.98133 - 0.21033$ **= 0.771** с точностью до 3 значащих цифр.

1.17.5. Предельные значения

Иногда необходимо найти пределы вида $\lim\limits_{\delta x \to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$, где $f(a)$ и $g(a) = 0$.

Например, $\lim\limits_{\delta x \to 1}\left\{\frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+6}\right\} = \frac{1+3-4}{1-7+6} = \frac{0}{0}$, а $\frac{0}{0}$, вообще говоря, рассматривается как неопределенность.

Правило Лопиталя позволяет находить подобные пределы путем определения значений производных в числителе и знаменателе.

Правило Лопиталя устанавливает:

$$\lim_{\delta x \to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \lim_{\delta x \to a}\left\{\frac{f'(x)}{g'(x)}\right\}$$ при условии, что $g'(a) \neq 0$.

Может оказаться, что $\lim\limits_{\delta x \to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ по-прежнему равен $\frac{0}{0}$, тогда числитель и знаменатель дифференцируют снова (и снова), до тех пор, пока в знаменателе не будет получена ненулевая величина.

Пример. Найдем $\lim\limits_{\delta x \to 1}\left\{\frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+6}\right\}$.

Первый шаг — это подстановка в числитель и знаменатель $x = 1$. В этом случае мы получаем $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя мы должны использовать только при наличии такого результата. Значит, применяем правило Лопиталя (т. е. дифференцируем и числитель, и знаменатель):

$$\lim_{\delta x \to 1}\left\{\frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+6}\right\} = \lim_{\delta x \to 1}\left\{\frac{2x+3}{2x-7}\right\} = \frac{5}{-5} = \mathbf{-1}.$$

1.18. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАТИВНЫМИ МЕТОДАМИ

1.18.1. Введение в теорию итеративных методов

Многие уравнения можно решить графически или методами последовательных приближений к корням, называемыми *итеративными методами*. Три метода последовательных приближений суть: 1) метод деления отрезка пополам, 2) алгебраический метод и 3) использование формулы Ньютона.

Все методы последовательных приближений основаны на достаточно точной оценке значения корня. Чтобы быстро ее найти, можно набросать график функции, скажем, $y = f(x)$ и определить приблизительные значения корней в точках, где график пересекает ось x. Другой способ — использование функциональной записи. Метод основан на следующем свойстве: значение графика $f(x)$ меняет знак для значений x до и после значения корня. Например, один корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ равен 3. Используя метод функциональной записи, получаем

$$f(x) = x^2 - x - 6,$$
$$f(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4,$$
$$f(4) = 4^2 - 4 - 6 = +6.$$

По этим результатам видно, что значения $f(x)$ меняются от -4 при $f(2)$ до $+6$ при $f(4)$. Значит, корень лежит между 2 и 4. Это более ясно проиллюстрировано на **Рис. 1.16**.

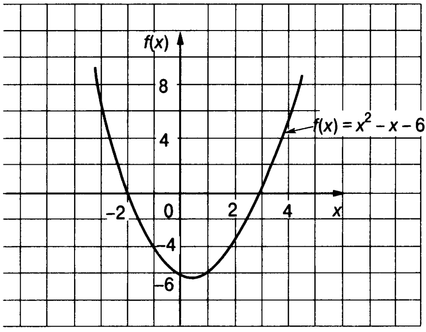


Рис. 1.16

1.18.2. Метод деления пополам

Как было показано ранее, с помощью функциональной записи можно определить окрестность корня уравнения по появлению перемены знака, т. е. если x_1 и x_2 таковы, что $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки, то в интервале между x_1 и x_2 существует минимум один корень уравнения $f(x) = 0$ (при условии, что $f(x)$ — непрерывная функция). В *методе деления отрезка пополам* берется средняя точка интервала, т. е. $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, и по знаку $f(x_3)$ можно определить, лежит ли корень в левой или правой части интервала относительно x_3. Какой бы интервал ни был выбран, далее берется его средняя точка, и процедура повторяется. Метод часто требует большого количества итераций, и поэтому он медленный, но в конечном счете всегда дает корень. Процедура останавливается, когда два последовательных значения x равны с заданной степенью точности.

Пример. Используя метод деления пополам, найдем положительный корень уравнения $x + 3 = e^x$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Пусть $f(x) = x + 3 - e^x$. Тогда, используя функциональную запись, получим

$$f(\mathbf{0}) = 0 + 3 - e^0 = \mathbf{+2},$$

$$f(\mathbf{1}) = 1 + 3 - e^1 = \mathbf{+1.2817...},$$

$$f(\mathbf{2}) = 2 + 3 - e^2 = \mathbf{-2.3890...}\,.$$

Поскольку $f(1)$ положительно, а $f(2)$ отрицательно, значит, корень лежит между $x = 1$ и $x = 2$. Набросок графиков, дающих решение уравнения $x + 3 = e^x$, показан на **Рис. 1.17**.

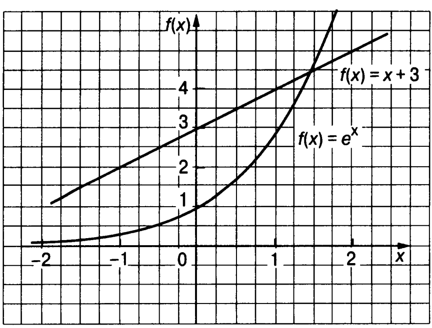


Рис. 1.17

Делим пополам интервал между $x = 1$ и $x = 2$: $\frac{1+2}{2} = 1.5$.

Следовательно, $\boldsymbol{f(1.5)} = 1.5 + 3 - e^{1.5} = \mathbf{+0.01831...}$.

Значение $f(1.5)$ положительно, а $f(2)$ отрицательно, значит, корень лежит между $x = 1.5$ и $x = 2$.

Делим этот интервал пополам: $\frac{1.5+2}{2} = 1.75$.

Следовательно, $\boldsymbol{f(1.75)} = 1.75 + 3 - e^{1.75} = \mathbf{-1.00460...}$.

Поскольку $f(1.75)$ отрицательно, а $f(1.5)$ положительно, то корень лежит в интервале между $x = 1.75$ и $x = 1.5$.

Делим этот интервал пополам: $\frac{1.75+1.5}{2} = 1.625$.

Следовательно, $\boldsymbol{f(1.625)} = 1.625 + 3 - e^{1.625} = \mathbf{-0.45341...}$.

Поскольку $f(1.625)$ отрицательно, а $f(1.5)$ положительно, то корень лежит в интервале между $x = 1.625$ и $x = 1.5$.

Делим этот интервал пополам: $\frac{1.625+1.5}{2} = 1.5625$.

Следовательно, $\boldsymbol{f(1.5625)} = 1.625 + 3 - e^{1.5625} = \mathbf{-0.20823...}$.

Поскольку $f(1.5625)$ отрицательно, а $f(1.5)$ положительно, то корень лежит в интервале между $x = 1.625$ и $x = 1.5$.

Далее приближения продолжаются, и их результаты представлены в таблице.

x_1	x_2	$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$	$f(x_3)$
		0	+2
		1	+1.2817...
		2	−2.3890...
1	2	1.5	+0.0183...
1.5	2	1.75	−1.0046...
1.5	1.75	1.625	−0.4534...
1.5	1.625	1.5625	−0.2082...
1.5	1.5625	1.53125	−0.0927...
1.5	1.53125	1.515625	−0.0366...
1.5	1.515625	1.5078125	−0.0090...
1.5	1.5078125	1.50390625	+0.0046...
1.50390625	1.5078125	1.505859375	−0.0021...
1.50390625	1.505859375	**1.504882813**	+0.0012...
1.504882813	1.505859375	**1.505388282**	

Последние два значения x_3 в таблице — это 1.504882813 и 1.505388282, т. е. оба они равны 1.505 с точностью до 3 знаков после десятичной точки. На этом процесс аппроксимации завершается.

Следовательно, корень уравнения $\boldsymbol{x + 3 = e^x}$ есть $\boldsymbol{x = 1.505}$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

1.18.3. Алгебраический метод последовательных приближений

Данный метод может быть использован для решения уравнений вида $a + bx + cx^2 + dx^3 + ... = 0$, где $a, b, c, d,...$ — константы.

Процедура следующая:

Первое приближение

а) Используя графический метод или метод функциональной записи, определяем приблизительное значение искомого корня, скажем, x_1.

Второе приближение

б) Пусть истинное значение корня равно $(x_1 + \delta_1)$.

в) Найдем приблизительное значение x_2 для $(x_1 + \delta_1)$, определив значение корня для уравнения $f(x_1 + \delta_1) = 0$ и пренебрегая членами, содержащими более высокие степени δ_1.

Третье приближение

г) Пусть истинное значение корня равно $(x_2 + \delta_2)$.

д) Найдем приблизительное значение x_3 для $(x_2 + \delta_2)$, определив значение корня для уравнения $f(x_2 + \delta_2) = 0$ и пренебрегая членами, содержащими более высокие степени δ_2.

е) Четвертое и дальнейшие приближения получают тем же способом.

Используя технику, описанную в п. б)...е), можно продолжить приближение значения к истинной величине корня. Процедура повторяется до тех пор, пока величина искомого корня не останется неизменной с требуемой степенью точности для двух последовательных приближений.

Примечание. Увеличив точность оценки членов $f(x + \delta)$, можно уменьшить количество необходимых приближений на одно или два. Однако обычно в подобных вычислениях применяется точность не выше, чем до 4 значащих цифр. Если в расчете допущена небольшая погрешность, это может привести лишь к увеличению количества приближений.

Пример. Определить величину наименьшего положительного корня уравнения $3x^3 - 10x^2 + 4x + 7 = 0$ с точностью до трех значащих цифр, используя алгебраический метод последовательных приближений.

Для определения первого приближения используем метод функциональной записи.

$$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 4x + 7,$$
$$f(0) = 3(0)^3 - 10(0)^2 + 4(0) + 7 = 7,$$
$$f(1) = 3(1)^3 - 10(1)^2 + 4(1) + 7 = 4,$$
$$f(2) = 3(2)^3 - 10(2)^2 + 4(2) + 7 = -1.$$

Следуем описанной выше процедуре:

Первое приближение

а) Пусть первое приближение будет таково, чтобы интервал от 1 до 2 делился на части в отношении 4 к 1, т. е. пусть x_1 равняется 1.8.

Второе приближение

б) Пусть истинная величина корня x_2 равняется $(x_1 + \delta_1)$.

в) Пусть $f(x_1 + \delta_1) = 0$, тогда, поскольку $x_1 = 1.8$,

$$3(1.8 + \delta_1)^3 - 10(1.8 + \delta_1)^2 + 4(1.8 + \delta_1) + 7 = 0.$$

Пренебрегая членами, содержащими δ_1 в степени выше 1, и используя биномиальное разложение, получим

$$3[1.8^3 + 3(1.8)^2\delta_1] - 10[1.8^2 + (2)(1.8)\delta_1] + 4(1.8 + \delta_1) + 7 \approx 0,$$

$$3(5.832 + 9.720\delta_1) - 32.4 - 36\delta_1 + 7.2 + 4\delta_1 + 7 \approx 0,$$

$$17.496 + 29.16\delta_1 - 32.4 - 36\delta_1 + 7.2 + 4\delta_1 + 7 \approx 0,$$

$$\delta_1 \approx \frac{-17.496 + 32.4 - 7.2 - 7}{29.16 - 36 + 4} \approx \frac{0.704}{2.84} \approx -0.2479.$$

Итак, $x_2 \approx 1.8 - 0.2479 = 1.5521$.

Третье приближение

г) Пусть истинная величина корня x_3 равняется $(x_2 + \delta_2)$.

д) Пусть $f(x_2 + \delta_2) = 0$, тогда, поскольку $x_2 = 1.5521$,

$$3(1.5521 + \delta_2) - 10(1.5521 + \delta_2)^2 + 4(1.5521 + \delta_2) + 7 = 0.$$

Пренебрегаем членами, содержащими δ_2 в степени выше 1:

$$11.217 + 21.681\delta_2 - 24.090 - 31.042\delta_2 + 6.2084 + 4\delta_2 + 7 \approx 0,$$

$$\delta_2 \approx \frac{-11.217 + 24.09 - 6.2084 - 7}{21.681 - 31.042 + 4} \approx \frac{-0.3354}{-5.361} \approx 0.06256.$$

Итак, $x_3 \approx 1.5521 + 0.06256 \approx 1.6147$.

е) Величины x_4 и x_5 определяем аналогичным способом.

$$f(x_3 + \delta_3) = 3(1.6147 + \delta_3)^3 - 10(1.6147 + \delta_3)^2 +$$
$$+ 4(1.6147 + \delta_3) + 7 = 0.$$

Получаем $\delta_3 \approx 0.003175$ и $x_4 \approx 1.618$, т. е. 1.62 с точностью до 3 значащих цифр.

$$f(x_4+\delta_4) = 3(1.618+\delta_4)^3-10(1.618+\delta_4)^2+$$
$$+4(1.618+\delta_4)+7 = 0.$$

Получаем $\delta_4 \approx 0.0000417$ и $x_5 \approx 1.62$ с точностью до 3 значащих цифр. Поскольку x_4 и x_5 одинаковы, если выразить их с заданной степенью точности, то искомый корень есть **1.62** с точностью до 3 значащих цифр.

1.18.4. Метод Ньютона

Формула Ньютона, часто называемая *методом Ньютона,* может быть записана следующим образом:

$$\boxed{r_2 = r_1-\frac{f(r_1)}{f'(r_1)}}$$

где r_1 — приблизительное значение истинного корня уравнения $f(x)=0$,
r_2 — более близкая к корню аппроксимация.

Преимущество метода Ньютона перед алгебраическим методом последовательных приближений состоит в том, что его можно применять для любого типа математических уравнений (т. е. содержащих тригонометрические, экспоненциальные, логарифмические, гиперболические и алгебраические функции), и его обычно проще использовать, чем алгебраический метод.

Пример. Используя метод Ньютона, найдем положительный корень уравнения $(x+4)^3-e^{1.92x}+5\cos\frac{x}{3} = 9$ с точностью до 3 значащих цифр.

Используем метод функциональной записи для определения приблизительной величины корня.

$$f(x)= (x+4)^3-e^{1.92x}+5\cos\frac{x}{3}-9,$$

$$f(0)= (0+4)^3-e^0+5\cos 0-9 = 59,$$

$$f(1)= 5^3-e^{1.92}+5\cos\frac{1}{3}-9\approx 114,$$

$$f(2)= 6^3-e^{3.84}+5\cos\frac{2}{3}-9\approx 164,$$

$$f(3)= 7^3-e^{5.76}+5\cos 1-9\approx 19,$$

$$f(4)= 8^3-e^{7.68}+5\cos\frac{4}{3}-9\approx -1660.$$

Исходя из этих результатов, примем первую аппроксимацию корня равной $r_1 = 3$. Формула Ньютона устанавливает, что более точная аппроксимация

$$r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)},$$

$$f(r_1) = f(3) = 7^3 - e^{5.76} + 5\cos 1 - 9 \approx 19.35,$$

$$f'(x) = 3(x+4)^2 - 1.92e^{1.92x} - \frac{5}{3}\sin\frac{x}{3},$$

$$f'(r_1) = f'(3) = 3(7)^2 - 1.92e^{5.76} - \frac{5}{3}\sin 1 = -463.7.$$

Итак, $r_2 = 3 - \dfrac{19.35}{-463.7} = 3 + 0.042 = 3.042 = 3.04$ с точностью до 3 значащих цифр.

Аналогично $r_3 = 3.042 - \dfrac{f(3.042)}{f'(3.042)} = 3.042 - \dfrac{(-1.146)}{(-513.1)} =$ $= 3.042 - 0.0022 = 3.0398 = 3.04$ с точностью до 3 значащих цифр.

Поскольку r_2 и r_3 одинаковы, если выражать их с заданной степенью точности, то искомый корень равен **3.04** с точностью до 3 значащих цифр.

1.19. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ИНФОРМАТИКЕ

1.19.1. Десятичные и двоичные числа

Повседневно применяемая система чисел является *десятичной*, в ней используются цифры от 0 до 9. Система имеет десять разных разрядов (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9), и говорят, что ее основание равно 10.

Двоичная система счисления имеет основание 2 и использует только цифры 1 и 0.

1.19.2. Преобразование двоичных чисел в десятичные

Десятичное число 234.5 эквивалентно числу

$$2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$$

или сумме членов, каждый из которых содержит цифру, умноженную на основание, возведенное в некоторую степень.

У двоичной системы счисления основание 2, значит, число 1101.1 эквивалентно $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$.

Таким образом, эквивалентное двоичному числу 1101.1 десятичное число равно $8+4+0+1+\frac{1}{2}$, т.е. 13.5. Итак, $\mathbf{1101.1_2 = 13.5_{10}}$, индексы 2 и 10 означают двоичную и десятичную системы счисления соответственно.

Пример. Преобразовать 101.0101_2 в десятичное число.

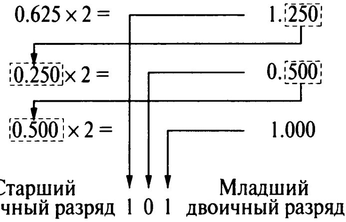
$$101.0101_2 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} +$$

$$+ 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} = 4+0+1+0+0.25+0+0.0625 = \mathbf{5.3125_{10}}.$$

1.19.3. Преобразование десятичных чисел в двоичные

Целое десятичное число может быть преобразовано в соответствующее ему двоичное число посредством последовательного деления на 2 и записи остатка на каждом этапе деления, как показано ниже на примере числа 39_{10}.

В искомом результате цифру *старшего разряда* остатка записывают как младший двоичный разряд (бит – это двоичный разряд, а *младший разряд* — тот, что находится справа). Младший бит остатка — это старший разряд, т. е. бит слева. Таким образом, $\mathbf{39_{10} = 100111_2}$.



Для дробей старший разряд результата — это старший бит целой части произведения исходного числа на 2. Младший разряд результата — это младший бит целой части произведения исходного числа на 2. Таким образом, $\mathbf{0.625_{10} = 0.101_2}$.

1.19.4. Преобразование десятичного числа в двоичное через десятичное

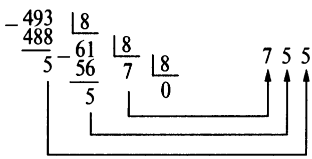
Для целых десятичных чисел, содержащих несколько разрядов, последовательное деление на 2 может быть длительным процессом. В данном случае, как правило, проще преобразовать десятичное число в двоичное через *восьмеричную систему* счисления. Эта система имеет основание 8 и использует цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Десятичное число, эквивалентное числу 4317_8, — это

$$4 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 7 \times 8^0 .$$

Итак, $4 \times 512 + 3 \times 64 + 1 \times 8 + 7 \times 1 = 2255_{10}$.

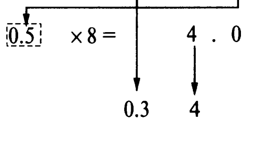
Таким образом, $\mathbf{4317_8 = 2255_{10}}$.

Целое десятичное число может быть преобразовано в соответствующее ему восьмеричное число посредством последовательного деления на 8 и записи остатка на каждом этапе деления, как показано ниже на примере числа 493_{10}.



Таким образом, $\mathbf{493_{10} = 755_8}$.

Дробная часть десятичного числа может быть преобразована в восьмеричную систему посредством умножения на 8, как показано ниже на примере дроби 0.4375_{10}:



Для дробей старший разряд — это старший разряд числа, полученного при умножении дроби на 8. Итак,

$$\mathbf{0.4375_{10} = 0.34_8}.$$

Естественное двоичное представление для цифр от 0 до 7 показано в **Табл. 1.5**. Восьмеричное число может быть преобразовано в двоичное посредством записи трех разрядов, соответствующих цифре в восьмеричной системе. Таким образом,

$437_8 = 100\,011\,111_2$

и $26.35_8 = 010\,110.011\,101_2$.

Если в старшем разряде записан «0», он не означает ничего. Таким образом,

$$26.35_8 = 10\,110.011\,101_2.$$

Чтобы преобразовать $11\,110\,011.100\,01_2$ в десятичное число через восьмеричную систему, поступаем так.

Группируем двоичные цифры в группы по три по правилам двоичной системы:

$$011\,110\,011.100\,010_2.$$

Таблица 1.5

Цифра в восьмеричной системе	Естественное двоичное представление
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Используя **Табл. 1.5** для преобразования этого двоичного числа в восьмеричное, в итоге получаем 363.42_8, откуда

$$363.42_8 = 3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2} =$$

$$= 192 + 48 + 3 + 0.5 + 0.03125 = \mathbf{243.53125_{10}}.$$

Следовательно, $\mathbf{11\,110\,011.100\,01_2 = 363.42_8 = 243.53125_{10}}$.

1.19.5. Шестнадцатеричные числа

Сложность компьютеров требует использования систем счисления с более высокими основаниями, таких как восьмеричная (основание 8) и шестнадцатеричная (основание 16), которые просто являются расширениями двоичной системы. *Шес-*

тнадцатеричная система счисления имеет основание 16 и использует следующие 16 символов:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E и F.

«A» соответствует 10 в десятичной системе, B — 11, C — 12 и так далее.

1.19.6. Преобразование из шестнадцатеричной системы в десятичную

$$\text{Например, } 1A_{16} = 1 \times 16^1 + A \times 16^0 = 1 \times 16^1 + 10 \times 1 =$$
$$= 16 + 10 = 26.$$

Итак, $\mathbf{1A_{16} = 26_{10}}$.

Аналогично

$$\mathbf{2E_{16}} = 2 \times 16^1 + E \times 16^0 = 2 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 32 + 14 = 46_{10}$$

и

$$\mathbf{1BF_{16}} = 1 \times 16^2 + B \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 15 \times 16^0 =$$
$$= 256 + 176 + 15 = \mathbf{447_{10}}.$$

В **Табл. 1.6** сравниваются десятичные, двоичные, восьмеричные и шестнадцатеричные числа; из нее можно увидеть, что, например, $\mathbf{23_{10} = 10111_2 = 27_8 = 17_{16}}$.

Таблица 1.6

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Продолжение таблицы

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15
22	10110	26	16
23	10111	27	17
24	11000	30	18
25	11001	31	19
26	11010	32	1A
27	11011	33	1B
28	11100	34	1C
29	11101	35	1D
30	11110	36	1E
31	11111	37	1F
32	100000	40	20

1.19.7. Преобразование из десятичной системы в шестнадцатеричную

Данное преобразование осуществляется посредством последовательного деления на 16 и записи остатка на каждом этапе деления, как показано ниже на примере числа 26_{10}.

$$
\begin{array}{lll}
26\,\underline{|16} & & \text{Остаток} \\
\quad 1\,\underline{|16} & & 10 \equiv A_{16} \\
\qquad 0 & & 1 \equiv 1_{16}
\end{array}
$$

Старший $\longrightarrow$ 1 A $\longleftarrow$ Младший
двоичный разряд двоичный разряд

Следовательно, $\mathbf{26_{10} = 1A_{16}}$.
Аналогично для 447_{10}

$$
\begin{array}{ll}
447\,\underline{|16} & \text{Остаток} \\
\quad 27\,\underline{|16} & 15 \equiv F_{16} \\
\qquad 1\,\underline{|16} & 11 \equiv B_{16} \\
\qquad\quad 0 & 1 \equiv 1_{16}
\end{array}
$$

1 B F

Таким образом, $\mathbf{447_{10} = 1BF_{16}}$.

1.19.8. Преобразование из двоичной системы в шестнадцатеричную

Двоичные биты группируют по четыре справа налево, и каждой группе соответствует шестнадцатеричный символ. Например, двоичное число 1110011110101001 сначала перегруппируем как 1110 0111 1010 1001; согласно **Табл. 1.6** соответствующие этим группам шестнадцатеричные символы есть E, 7, A, 9.

Следовательно, $\mathbf{1110011110101001_{10} = E7A9_{16}}$.

1.19.9. Преобразование из шестнадцатеричной системы в двоичную

Описанная выше процедура осуществляется в обратном порядке, например согласно **Табл. 1.6**:

$$6CF3_{16} = 0110\ 1100\ 1111\ 0011.$$

Итак, $\mathbf{6CF3_{16} = 110110011110011_2}$.

Глава 2

Определение длин, площадей и объемов

2.1. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

2.1.1. Свойства четырехугольников

Многоугольник — это замкнутая фигура, ограниченная прямыми линиями. Многоугольник, имеющий:

- 3 стороны, называется *треугольником*,
- 4 стороны, называется *четырехугольником*,
- 5 сторон, называется *пятиугольником*,
- 6 сторон, называется *шестиугольником,*
- 7 сторон, называется *семиугольником,*
- 8 сторон, называется *восьмиугольником.*

Существует пять типов четырехугольников, а именно

- *прямоугольник*,
- *квадрат*,
- *параллелограмм*,
- *ромб*,
- *трапеция*.

Их свойства рассмотрены далее.

Если противолежащие углы любого четырехугольника соединить прямой линией, получится два треугольника. Поскольку сумма углов треугольника равняется 180°, сумма углов четырехугольника равняется 360°.

В *прямоугольнике,* показанном на **Рис. 2.1**:

- все четыре угла — прямые,
- противоположные стороны параллельны и равны по длине,
- диагонали AC и BD равны по длине и в точке пересечения делят друг друга пополам.

В *квадрате,* показанном на **Рис. 2.2**:

- все четыре угла — прямые,
- противоположные стороны параллельны,
- все четыре стороны равны по длине,

- диагонали PR и QS равны по длине и пересекаются под прямым углом, в точке пересечения деля друг друга пополам.

В *параллелограмме,* показанном на **Рис. 2.3**:

- противолежащие углы равны,
- противоположные стороны параллельны и равны по длине,
- диагонали WY и XZ в точке пересечения делят друг друга пополам.

В *ромбе,* показанном на **Рис. 2.4**:

- противолежащие углы равны,
- противолежащие углы делятся диагоналями пополам,
- противоположные стороны параллельны,
- все четыре стороны равны по длине,
- диагонали AC и BD пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делят друг друга пополам.

В *трапеции*, показанной на **Рис. 2.5**, только две стороны параллельны.

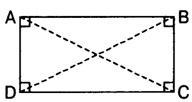


Рис. 2.1

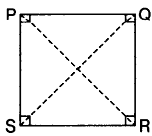


Рис. 2.2

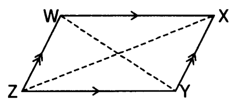


Рис. 2.3

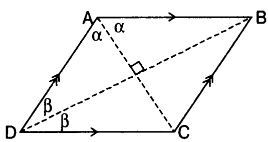


Рис. 2.4

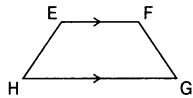


Рис. 2.5

2.1.2. Площади плоских фигур

Общие сведения о площадях часто встречающихся фигур приведены в **Табл. 2.1**.

Пример. Прямоугольный поднос имеет длину 820 мм и ширину 400 мм. Определить его площадь: а) в мм^2, б) в см^2, в) в м^2.

а) Площадь = длина × ширина = $820 \times 400 = 328\,000$ мм^2,

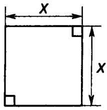
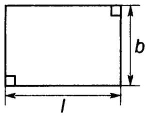
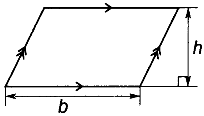
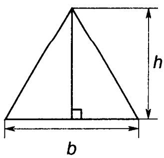
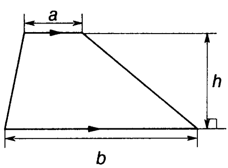
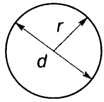
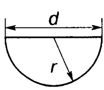
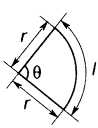
б) 1 см$^2 = 100$ мм^2, следовательно,

$$328\,000 \text{ мм}^2 = \frac{328\,000}{100} \text{ см}^2 = \mathbf{3282\ см^2},$$

в) 1 м$^2 = 10\,000$ см^2, следовательно,

$$3280 \text{ см}^2 = \frac{3280}{10\,000} \text{ м}^2 = \mathbf{0.3280} \text{ м}^2.$$

Таблица 2.1

Название фигуры	Площадь фигуры S
Квадрат	 $S = x^2$
Прямоугольник	 $S = l \times b$
Параллелограмм	 $S = b \times h$
Треугольник	 $S = \frac{1}{2} \times b \times h$
Трапеция	 $S = \frac{1}{2}(a + b)h$
Круг	 $S = \pi r^2$ или $\frac{\pi d^2}{4}$
Полукруг	 $S = \frac{1}{2}\pi r^2$ или $\frac{\pi d^2}{8}$
Сектор круга	 $S = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}(\pi r^2)$ или $\frac{1}{2} r^2\theta$ (θ в радианах)

Пример. Определить: а) площадь поперечного сечения балки, показанной на **Рис. 2.6а**, и б) площадь дорожки, показанной на **Рис. 2.6б**.

а) Сечение балки можно разделить на три отдельных прямоугольника, как показано на рисунке.

$S_{\square A} = 5 \times 50 = 250$ мм^2.

$S_{\square B} = (75 - 8 - 5) \times 6 = 62 \times 6 = 372$ мм^2.

$S_{\square C} = 70 \times 8 = 560$ мм^2.

Общая площадь балки $250 + 372 + 560 =$ **1182 мм^2 = 11.82 см^2**.

б) Площадь дорожки = площадь большого прямоугольника – – площадь малого прямоугольника = $(25 \times 20) - (21 \times 16) =$ $= 500 - 336 =$ **164 м^2**.

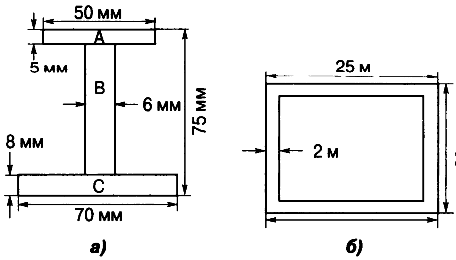


Рис. 2.6

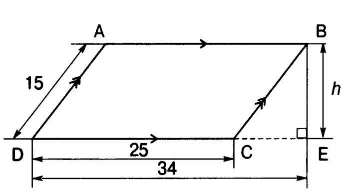


Рис. 2.7

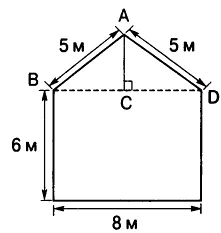


Рис. 2.8

Пример. Определить площадь параллелограмма, показанного на **Рис. 2.7** (размеры приведены в миллиметрах).

Площадь параллелограмма = основание × высота. Высота h определяется по теореме Пифагора.

$$BC^2 = CE^2 + h^2.$$

Тогда

$$15^2 = (34 - 25)^2 + h^2,$$
$$h^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144.$$

Следовательно, $h = \sqrt{144} = 12$ мм (корнем -12 можно пренебречь).

Следовательно, $S_{ABCD} = 25 \times 12 =$ **300 мм²**.

Пример. На **Рис. 2.8** показана боковая сторона здания. Определить площадь кирпичной кладки на боковой стороне.

Боковая сторона состоит из прямоугольника и треугольника.

$$S_{\square} = 6 \times 8 = 48 \text{ м}^2.$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{основание} \times \text{высота}.$$

CD = 4 м, AD = 5 м, следовательно, AC = 3 м (поскольку это треугольник со сторонами 3, 4 и 5 м). Следовательно,

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ м}^2.$$

Общая площадь кирпичной кладки есть 48 + 12 = **60 м²**.

Пример. Определить площади кругов, имеющих: а) радиус 5 см, б) диаметр 15 мм, в) длину окружности 70 мм.

$$S = \pi r^2 \text{ или } \frac{\pi d^2}{4}.$$

а) $S = \pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi = \mathbf{78.54\ см^2}$.

б) $S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(15)^2}{4} = \frac{225\pi}{4} = \mathbf{176.7\ мм^2}$.

в) Длина окружности $c = 2\pi r$, следовательно,

$$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{70}{2\pi} = \frac{35}{\pi}.$$

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{35}{\pi}\right) = \frac{35^2}{\pi} = \mathbf{389.9\ мм^2 = 3.899\ см^2}.$$

Пример. Вычислить площадь правильного восьмиугольника со стороной 5 см и поперечником 12 см.

Восьмиугольник — это многоугольник с 8 сторонами. Если из центра многоугольника провести лучи к вершинам, получится восемь одинаковых треугольников (см. **Рис. 2.9**).

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{основание} \times \text{высота} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{12}{2} \text{ см}^2 = 15 \text{ см}^2.$$

Площадь восьмиугольника есть 8 × 15 = **120 см²**.

Пример. Определить площадь правильного шестиугольника со стороной 8 см.

Шестиугольник — это многоугольник с шестью сторонами, который может быть разбит на шесть равных треугольников, как показано на **Рис. 2.10**. Сходящиеся в центре многоугольника углы треугольников равны 360°/6 = 60°.

Другие два угла каждого треугольника составляют в сумме 120° и равны между собой.

Следовательно, все треугольники являются равносторонними с углами 60° и стороной 8 см.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{основание} \times \text{высота}\,.$$

Высоту h находим по теореме Пифагора:

$$8^2 = h^2 + 4^2.$$

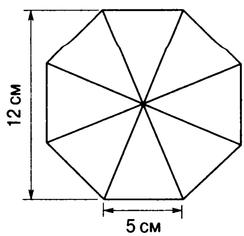


Рис. 2.9

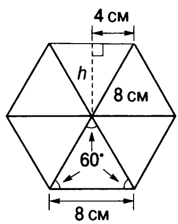


Рис. 2.10

Отсюда $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6.928$ см.

Следовательно, $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6.928 = 27.71$ см^2.

Площадь шестиугольника равна $6 \times 27.71 =$ **166.3 см^2**.

2.1.3. Площади подобных фигур

Площади подобных фигур пропорциональны квадратам соответствующих линейных размеров. Например, на **Рис. 2.11** представлены два квадрата, сторона одного из которых в 3 раза больше стороны другого.

Площадь фигуры на **Рис. 2.11а** равна $(x)(x) = x^2$.

Площадь фигуры на **Рис. 2.11б** равна $(3x)(3x) = 9x^2$.

Следовательно, площадь фигуры на **Рис. 2.11б** в $(3)^2$ раз больше, чем площадь фигуры на **Рис. 2.11а**.

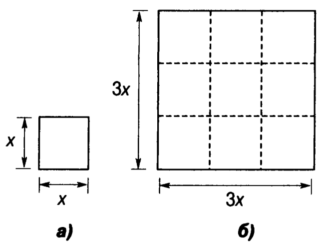


Рис. 2.11

Пример. Прямоугольный гараж на плане здания имеет размеры 10 на 20 мм. Если план нарисован в масштабе 1 к 250, истинные размеры гаража можно определить следующим образом.

Вычислим площадь гаража на плане: 10 мм × 20 мм = = 200 мм^2.

Поскольку площади подобных фигур пропорциональны квадратам соответствующих линейных размеров, то истинная площадь гаража

$$S = 200 \times (250)^2 = 12.5 \times 10^6 \text{ мм}^2.$$

Тогда $\dfrac{12.5 \times 10^6}{10^6}$ м^2 = **12.5 м^2**.

2.2. КРУГ И ЕГО СВОЙСТВА

2.2.1. Введение

Круг — это плоская фигура, ограниченная кривой, каждая точка которой равноудалена от точки, называемой *центром*.

2.2.2. Свойства кругов

- Расстояние от центра до внешней кривой называется *радиусом* круга r (OP на **Рис. 2.12**).
- Граница круга называется длиной *окружности c*.
- Любой отрезок прямой, проходящий через центр, концы которого лежат на окружности, называется *диаметром d* (QP на **Рис. 2.12**). Таким образом, $d = 2r$.
- Отношение $\dfrac{\text{длина окружности}}{\text{диаметр}} = a$ — константа для любого круга.

  Эта постоянная обозначается греческой буквой π (произносится как «пи»), она равна 3.14159 с точностью до 5 знаков после десятичной точки.

  Следовательно, $c/d = \pi$, или $c = \pi d$, или $c = 2\pi r$.

- *Полукруг* — это половина круга.
- *Квадрант* — это четверть целого круга.
- *Касательная к кругу* — это прямая линия, касающаяся окружности только в одной точке и не пересекающая окружность. AC на **Рис. 2.12** — это касательная к окружности, поскольку касается кривой только в точке B. Если провести радиус OB, то угол ABO будет прямым.
- *Сектор* круга — это часть круга между радиусами (например, часть OXY на **Рис. 2.13** — это сектор). Если сектор меньше полукруга, он называется *малый сектор*, если больше полукруга — *большой сектор*.
- *Хорда* круга — это любой отрезок, делящий круг на две части, концы которого лежат на окружности. На **Рис. 2.13** ST — это хорда.
- *Сегмент* — это название тех частей круга, на которые его делит хорда. Если сегмент меньше полукруга, он называется *малый сегмент* (заштрихованная область на **Рис. 2.13**), если больше полукруга — *большой сегмент* (незаштрихованная область на **Рис. 2.13**).
- *Дуга* — это часть ограничивающей круг окружности. SRT, показанная на **Рис. 2.13**, называется *малой дугой*, SXYT — *большой дугой*.
- Угол с вершиной в центре круга, опирающийся на дугу окружности, в 2 раза больше, чем угол с вершиной на окружности, опирающейся на ту же дугу. На **Рис. 2.14 угол AOC = 2 × × угол ABC**.
- Угол, вписанный в полукруг, является *прямым* (угол BQP на **Рис. 2.14**).

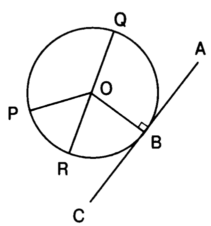


Рис. 2.12

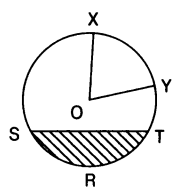


Рис. 2.13

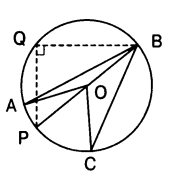


Рис. 2.14

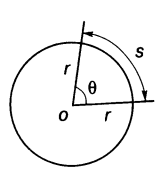


Рис. 2.15

2.2.3. Длина дуги и площадь сектора

Один *радиан* — это угол с вершиной в центре круга, опирающийся на дугу с длиной, равной радиусу. Из **Рис. 2.14** для *дуги длиной s*

$$\theta \text{ радиан} = s/r$$

или

$$\boxed{s = r\theta} \qquad (1)$$

где θ выражен в радианах.

Если s равна целой окружности, то $\theta = s/r = 2\pi r/r = 2\pi$.

Итак, 2π радиан = 360°, или

$$\boxed{\pi \text{ радиан} = 180°}$$

Таким образом, 1 радиан = $180°/\pi$ = 57.30° с точностью до двух знаков после десятичной точки.

Поскольку π радиан = 180°, то $\pi/2 = 90°$, $\pi/3 = 60°$, $\pi/4 = 45°$ и так далее.

Площадь сектора равна $\frac{\theta}{360}(\pi r^2)$, если θ выражен в градусах; а если θ выражен в радианах, то

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta. \qquad (2)$$

Пример. Преобразовать: а) 125°, б) 69° 47′ в радианы.

а) Поскольку 180° = π радиан, то 1° = $\pi/180°$ радиан; следовательно, $125° = 125\left(\frac{\pi}{180}\right) = \mathbf{2.182}$ **радиан**.

б) $69°47' = 69\frac{47°}{60} = 69.783° = 69.783\left(\frac{\pi}{180}\right) = \mathbf{1.218}$ **радиан**.

Пример. Преобразовать: а) 0.749 радиан, б) $3\pi/4$ радиан в градусы и минуты.

а) Поскольку π радиан = 180°, то 1 радиан = $180°/\pi$, следовательно, $0.749 = 0.749\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 42.915^{\circ}$,

0.915° = (0.915 × 60)′ = 55′ с точностью до минуты; значит,

0.749 радиан = 42°55′.

б) Поскольку 1 радиан = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, то $\frac{3\pi}{4}$ радиан = $\frac{3\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ =

$= \frac{3}{4}(180)° = \mathbf{135°}$.

Пример. Выразить: а) 150°, б) 270°, в) 37.5° в радианах в долях π.

Поскольку $180° = \pi$ радиан, то $1 = 180°/\pi$; значит,

а) $150° = 150\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$ **радиан.**

б) $270° = 270\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}$ **радиан.**

в) $37.5° = 37.5\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{75\pi}{360} = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{24}}$ **радиан.**

Пример. Найти длину дуги окружности радиусом 5.5 см, ограниченной углом 1.20 радиан.

Из уравнения (1) длина дуги $s = r\theta$, где θ выражен в радианах. Следовательно, $s = (5.5)(1.20) =$ **6.60 см**.

Пример. Определить диаметр и длину окружности, если дуга длиной 4.75 см ограничивает угол 0.91 радиан.

Поскольку $s = r\theta$, то $r = \frac{s}{\theta} = \frac{4.75}{0.91} = 5.22$ см.

Диаметр $d = 2 \times r = 2 \times 5.22 =$ **10.44 см**.

Длина окружности $c = \pi d = \pi(10.44) =$ **32.80 см**.

Пример. Прожектор на футбольном стадионе может освещать сектор с углом 45° и радиусом 55 м. Определим максимальную освещаемую им площадь.

Так как освещаемая площадь равна площади сектора, то, используя уравнение (2), получаем

$$S = \frac{1}{2}(55)^2\left(45 \times \frac{\pi}{180}\right) = \mathbf{1188\ м^2}.$$

2.2.4. Уравнение окружности

Простейшее уравнение окружности с началом в центре координат и радиусом r задается в виде

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Например, на **Рис. 2.16** показана окружность $x^2 + y^2 = 9$.

В более общем виде уравнение окружности с центром в точке (a, b) и радиусом r задается в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \qquad (1)$$

На **Рис. 2.17** показана окружность $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

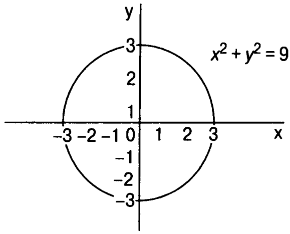


Рис. 2.16

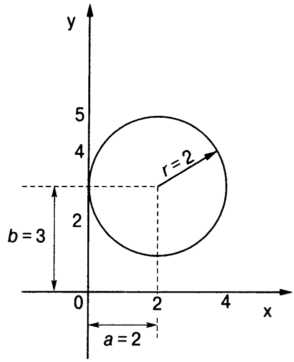


Рис. 2.17

Общее уравнение окружности есть

$$x^2 + y^2 + 2ex + 2fy + c = 0. \qquad (2)$$

Раскрываем скобки в уравнении (1):

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2.$$

Сравниваем с уравнением (2): $2e = -2a$, т. е. $\boldsymbol{a} = -\dfrac{\boldsymbol{2e}}{\boldsymbol{2}}$ и

$2f = -2b$; итак, $\boldsymbol{b} = -\dfrac{\boldsymbol{2f}}{\boldsymbol{2}}$ и $c = a^2 + b^2 - r^2$, т.е. $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}}$.

Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

задает окружность с центром в точке $a = -\left(\dfrac{-4}{2}\right)$, $b = -\left(\dfrac{-6}{2}\right)$,

т. е. в точке (2, 3) с радиусом $r = \sqrt{2^2 + 3^2 - 9} = 2$.

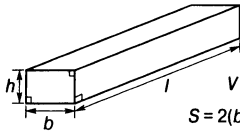
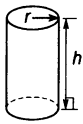
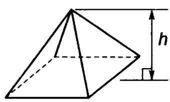
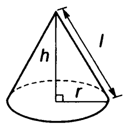
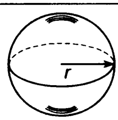
Следовательно, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ — это окружность, показанная на **Рис. 2.17**, что можно проверить, раскрыв скобки в уравнении $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

2.3. ОБЪЕМЫ ПРОСТЫХ ТЕЛ

2.3.1. Объемы и площади поверхностей правильных тел

Общая информация об объемах и площадях поверхностей правильных тел приведена в **Табл. 2.2**.

Таблица 2.2

Прямоуголь-ный параллеле-пипед	 $V = l \times b \times h$ $S = 2(bh \times hl \times lb)$
Цилиндр	 $V = \pi r^2 h$ $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Пирамида	 $V = \frac{1}{3} \times S_1 \times h$, где S_1 — площадь основания и h — высота перпендикуляра Общая площадь поверхности = (сумма площадей боковых граней) + (площадь основания)
Конус	 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $S_{конуса} = \pi rl$ $S = \pi rl + \pi r^2$
Сфера	 Объем $= \frac{4}{3} \pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

Пример. Бак для воды имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 2 м, шириной 75 см и высотой 50 см. Определить объем бака в м^3, см^3, литрах.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен $l \times b \times h$ (см. **Табл. 2.2**).

а) $V_{бака} = 2 \times 0.75 \times 0.5 = \mathbf{0.75\ м^3}$.

б) 1 м^3 = 10^6 см^3; значит, 0.75 м^3 = 0.75×10^6 = **750 000 см^3**.

в) 1 литр = 1000 см^3; значит, 750 000 см^3 $= \frac{750\,000}{1000}$ = **750 л**.

Пример. Вычислить объем и общую площадь поверхности призмы, показанной на **Рис. 2.18**.

Тело, показанное на **Рис. 2.18**, — это трапецеидальная призма.

Так как объем = площадь поперечного сечения × высота, то

$$V = \frac{1}{2}(11+5)4 \times 15 = 32 \times 15 = \mathbf{480\ см^3}.$$

Так как площадь поверхности вычисляется сложением суммы площадей двух трапеций и суммы площадей четырех прямоугольников, то

$$S = (2 \times 32) + (5 \times 15) + (11 \times 15) + 2(5 \times 15) =$$
$$= 64 + 75 + 165 + 150 = \mathbf{454\ см^2}.$$

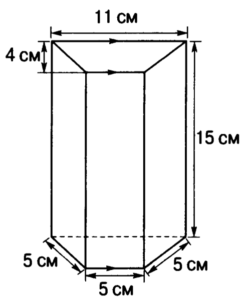


Рис. 2.18

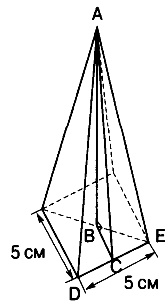


Рис. 2.19

Пример. Определить объем и общую площадь поверхности правильной пирамиды с квадратным основанием, показанной на **Рис. 2.19**, если ее высота равна 12 см.

Так как объем пирамиды = $\frac{1}{3}$ (площадь основания) × высота, то

$$V = = \frac{1}{3}(5 \times 5) \times 12 = \mathbf{100\ см^3}.$$

Общая площадь поверхности включает площадь квадратного основания и площади четырех равных треугольников.

Площадь треугольника ADE = $\frac{1}{2}$ × основание × (высота грани).

Высоту грани AC можно найти по теореме Пифагора из треугольника ABC, где AB = 12 см, BC = $\frac{1}{2} \times 5 = 2.5$ см, и

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 2.5^2} = 12.26$ см.

Следовательно, площадь треугольника ADE

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \times 5 \times 12.26 = 30.65 \text{ см}^2.$$

Общая площадь пирамиды $S = (5 \times 5) + 4(30.65) = \mathbf{147.6\ см^2}$.

Пример. Определить объем и общую площадь поверхности конуса радиусом 5 см и высотой 12 см.

Конус показан на **Рис. 2.20**.

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = \mathbf{314.2\ см^3}$.

Общая площадь поверхности равна сумме площади конической поверхности и площади основания, т. е. $S = \pi rl + \pi r^2$.

Из **Рис. 2.20** видно, что длину образующей l можно найти по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ см}.$$

Следовательно, общая площадь поверхности равна

$$S = (\pi \times 5 \times 13) + (\pi \times 5^2) = \mathbf{282.7\ см^2}.$$

Пример. На **Рис. 2.21** показан деревянный профиль. Найдем: а) его объем в (м^3), б) общую площадь его поверхности.

Профиль представляет собой призму, поперечное сечение которой состоит из прямоугольника и полукруга. Поскольку радиус полукруга равен 8 см, диаметр равен 16 см.

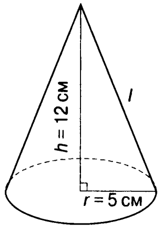


Рис. 2.20

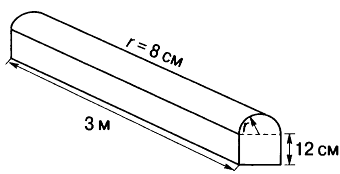


Рис. 2.21

Тогда размеры прямоугольника 12 × 16 см.

Площадь поперечного сечения $S = (12 \times 16) + \frac{1}{2}\pi 8^2 = 292.5 \text{ см}^2$.

Поскольку объем деревянной детали равен произведению площади поперечного сечения на длину, то

$$V = 292.5 \times 300 = 87750 \text{ см}^3 = \frac{87750 \text{ м}^3}{10^6} = \mathbf{0.08775\ м^3}.$$

Общая площадь включает два торца (площадь каждого 292.5 см^2), три прямоугольника и криволинейную поверхность (которая представляет собой полуцилиндр). Следовательно, общая площадь поверхности

$$S = (2 \times 292.5) + 2(12 \times 300) + (16 \times 300) + \frac{1}{2}(2\pi \times 8 \times 300) =$$

$$= 585 + 7200 + 4800 + 2400\pi = \mathbf{20125\ см^2 = 2.0125\ м^2}.$$

Пример. Бойлер состоит из цилиндрической секции длиной 8 м и диаметром 6 м, к одному концу которой присоединена полусферическая секция диаметром 6 м, а к другому концу — коническая секция высотой 4 м и диаметром основания 6 м. Вычислить объем бойлера и общую площадь его поверхности. Бойлер показан на **Рис. 2.22**.

$$V_{\text{полусферы } P} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi\ м^3.$$

$$V_{\text{цилиндра } Q} = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi\ м^3.$$

$$V_{\text{конуса } R} = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi\ м^3.$$

Общий объем бойлера $V = 18\pi + 72\pi + 12\pi = 102\pi = \mathbf{320.4\ м^3}$.

$$S_{\text{полусферы } P}\ P = \frac{1}{2}(\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi\ м^2.$$

$$S_{\text{цилиндра } Q} = 2\pi r h = 1 \times \pi \times 3 \times 8 = 48\pi\ м^2.$$

Длина образующей конуса l рассчитывается по теореме Пифагора из треугольника ABC; значит, $l = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$.

$S_{\text{конуса } R} = \pi r l = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi\ м^2$. **Общая площадь поверхности бойлера**

$$S = 18\pi + 48\pi + 15\pi = 81\pi = \mathbf{254.5\ м^2}.$$

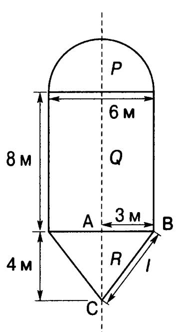


Рис. 2.22

2.3.2. Объемы и площади поверхностей усеченных пирамид и конусов

Усеченная пирамида или *конус* — это часть, остающаяся после отсечения вершины плоскостью, параллельной основанию.

Объем усеченной пирамиды или *конуса* равен объему целой пирамиды или конуса минус объем отсеченной вершины.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды или *конуса* равна площади поверхности целой пирамиды или конуса минус площадь поверхности отсеченной вершины. Если необходимо найти общую площадь усеченной фигуры, тогда площадь двух параллельных оснований добавляется к площади боковой поверхности.

Существует другой метод определения объема и площади поверхности усеченного конуса. Из **Рис. 2.23**:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2),$$

площадь конической поверхности $S = \pi l(R + r)$,
общая площадь поверхности $S_0 = \pi l(R + r) + \pi r^2 + \pi R^2$.

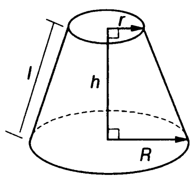


Рис. 2.23

Пример. Абажур имеет форму усеченного конуса. Высота абажура равна 25.0 см, нижний и верхний диаметры — 20.0 см и 10.0 см соответственно. Определить с точностью до 3 значащих цифр площадь материала, необходимого для изготовления абажура.

Как было определено выше, площадь конической поверхности усеченного конуса $S = \pi l(R + r)$.

Поскольку верхний и нижний диаметры усеченного конуса равны 20.0 и 10.0 см, то из **Рис. 2.24** находим

$r = 5.0$ см, $R = 10.0$ см и $l = \sqrt{[25.0^2 + 5.0^2]} = 25.50$ см, согласно теореме Пифагора.

Следовательно, площадь конической поверхности равна $S = \pi(25.50)(10.0 + 5.0) = 1201.7$ см^2, т. е. площадь необходимого для изготовления абажура материала равняется **1200 см^2** с точностью до 3 значащих цифр.

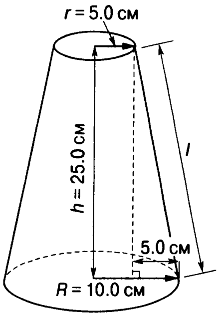


Рис. 2.24

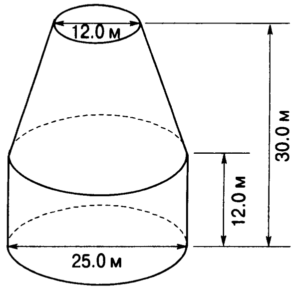


Рис. 2.25

Пример. Башенный охладитель имеет форму цилиндра, увенчанного усеченным конусом, как показано на **Рис. 2.25**. Определить объем воздушного пространства в башне, если 40% объема занято трубами и другими структурами.

Объем цилиндрической части

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{25.0}{2}\right)^2 (12.0) = 5890 \text{ м}^3.$$

Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$,

где $h = 30.0 - 12.0 = 18.0$ м, $R = 25.0/2 = 12.5$ м и $r = 12.0/2 = 6.0$ м.

$$R = 25.0/2 = 12.5 \text{ м и } r = 12.0/2 = 6.0 \text{ м}.$$

Следовательно, объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi(18)[(12.5)^2 + (12.5)(6.0) + (6.0)^2] = 5038 \text{ м}^3.$$

Общий объем башенного охладителя $V = 5890 + 5038 = 10\,928$ м^3.

Если 40% объема занято, то **объем воздушного пространства** $V = 0.6 \times 10\,928 =$ **6557 м^3**.

2.3.3. Шаровой слой и шаровой пояс

Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi^3$, а площадь сферы равна $4\pi r^2$.

Шаровой слой — это часть шара между двумя параллельными плоскостями. На **Рис. 2.26** PQRS — шаровой слой. *Шаровой пояс* — это сферическая поверхность шарового слоя. Из **Рис. 2.26**:

площадь шарового пояса $S = 2\pi rh$;

объем шарового слоя $V = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$.

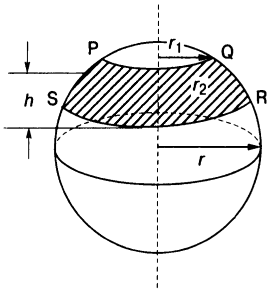


Рис. 2.26

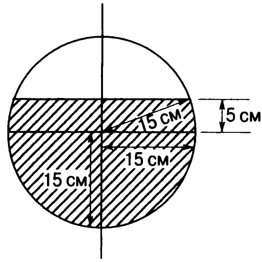


Рис. 2.27

Пример. Определить объем шарового слоя шара с диаметром 49.74 см, если верхний и нижний диаметры слоя есть 24.0 см и 40.0 см, а его высота 7.00 см.

Как было найдено выше, объем шарового слоя

$$V = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2),$$

где $h = 0.007$ см, $r_1 = 24.0/2 = 12.0$ см и $r_2 = 40.0/2 = 20.0$ см.

Следовательно, объем шарового слоя равен

$$V = \frac{\pi(7.00)}{6}[(7.00)^2 + 3(12.0)^2 + 3(20.0)^2] = \mathbf{6161\ см^3}.$$

Пример. Определить площадь шарового пояса из предыдущего примера.

Площадь шарового пояса $S = 2\pi rh$ (как было определено выше), где радиус сферы $r = 49.74/2 = 24.87$ см, а $h = 7.00$ см. Следовательно, площадь шарового пояса равна

$$S = 2\pi(24.87)(7.00) = \mathbf{1094\ см^2}.$$

Пример. Сферический резервуар наполнен жидкостью до высоты 20 см. Определить объем жидкости в резервуаре (1 литр = = 1000 см^3), если его внутренний диаметр равен 30 см.

Жидкость представлена в виде заштрихованной области в показанном на **Рис. 2.27** сечении. Объем жидкости включает полусферу и шаровой пояс высотой 5 см. Следовательно, объем жидкости есть $V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{\pi h}{6}[h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2]$, где $r_2 = 30/2 = 15$ см и $r_1 = \sqrt{15^2 - 5^2} = 14.14$ см.

Объем жидкости $V = \frac{2}{3}\pi(15)^3 + \frac{\pi(5)}{6}[5^2 + 3(14.14)^2 + 3(15)^2] =$

$= 7069 + 3403 = 10470$ см^3.

Поскольку 1 литр = 1000 см^3, то количество литров жидкости равно

$$\frac{10470}{1000} = \mathbf{10.47} \text{ **литра**}.$$

2.3.4. Объемы подобных тел

Объемы подобных тел пропорциональны кубам соответствующих линейных размеров. Например, на **Рис. 2.28** показаны два куба, сторона одного из которых в 3 раза больше стороны другого.

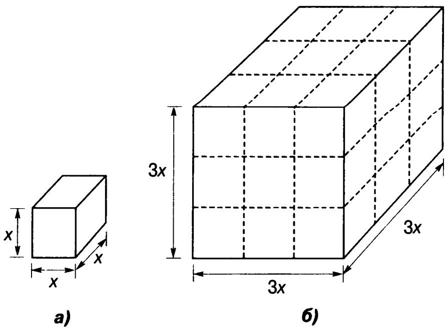


Рис. 2.28

Объем тела с **Рис. 2.28а** $V = (x)(x)(x) = x^3$.

Объем тела с **Рис. 2.28б** $V = (3x)(3x)(3x) = 27x^3$.

Следовательно, тело на **Рис. 2.28б** имеет объем $(3)^3$, т. е. его объем в 27 раз больше объема тела на **Рис. 2.28а**.

Пример. Масса автомобиля 1000 кг. Изготовлена модель автомобиля в масштабе 1:50. Определить массу модели автомобиля, если она сделана из того же материала, что и сам автомобиль.

$\frac{\text{Объем модели}}{\text{Объем автомобиля}} = \left(\frac{1}{50}\right)^3$, поскольку объемы подобных тел пропорциональны кубам соответствующих линейных размеров. Масса = плотность × объем, а так как автомобиль и модель сделаны из одного материала, значит:

$$\frac{\text{Масса модели}}{\text{Масса автомобиля}} = \left(\frac{1}{50}\right)^3.$$

Следовательно,

$$\text{масса модели} = (\text{масса автомашины}) \times \left(\frac{1}{50}\right)^3 =$$

$$= \frac{1000}{50^3} = \mathbf{0.008\ кг = 8\ г.}$$

2.4. ПЛОЩАДИ НЕПРАВИЛЬНЫХ ФИГУР, ОБЪЕМЫ НЕПРАВИЛЬНЫХ ТЕЛ

2.4.1. Площади неправильных фигур

Площади неправильных плоских фигур можно приблизительно определить, используя планиметр, формулу трапеций, правило средних ординат, формулу Симпсона.

Подобные методы могут быть использованы, например, инженерами для оценки площадей индикаторных диаграмм паровых двигателей, землемерами для оценки площадей земельных участков, кораблестроителями для оценки горизонтальных или поперечных сечений кораблей.

Планиметр

Это инструмент для непосредственного измерения малых площадей, очерченных неправильной кривой.

Формула трапеций

Чтобы определить площадь PQRS на **Рис. 2.29**, необходимо:

- Разделить PS на любое число равных интервалов шириной d каждый (чем больше количество интервалов, тем выше точность).
- Аккуратно измерить ординаты y_1, y_2, y_3 и так далее.
- Площадь $S_{PQRS} = d\left[\frac{y_1 + y_7}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6\right]$.

В общем согласно формуле трапеций:

$$\boxed{\text{Площадь} = \begin{pmatrix}\text{ширина}\\ \text{интервала}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\text{первая + последняя}\\ \text{ордината}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{сумма}\\ \text{остальных}\\ \text{ординат}\end{pmatrix}\right]}$$

Правило средних ординат

Чтобы определить площадь ABCD на **Рис. 2.30**, необходимо:

- Разделить основание AD на любое количество равных интервалов шириной d каждый (чем больше количество интервалов, тем выше точность).
- Восстановить перпендикуляр из середины каждого интервала (показаны штриховыми линиями на **Рис. 2.30**).

- Точно измерить ординаты y_1, y_2, y_3 и так далее.
- Площадь $S_{ABCD} = d(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$.

В общем виде правило средних ординат гласит:

Площадь = (ширина интервала) × (сумма средних ординат)

Формула Симпсона

Чтобы определить площадь PQRS на **Рис. 2.29**, необходимо:

- Разделить основание AD на ***четное*** количество равных интервалов шириной d каждый (чем больше количество интервалов, тем выше точность).
- Точно измерить ординаты y_1, y_2, y_3 и так далее.
- Площадь $S_{PQRS} = \frac{d}{3}[(y_1 + y_7) + 4(y_2 + y_4 + y_6) + 2(y_3 + y_5)]$.

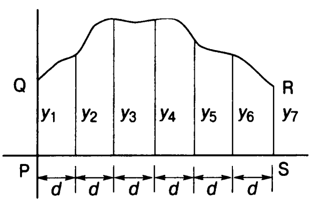


Рис. 2.29

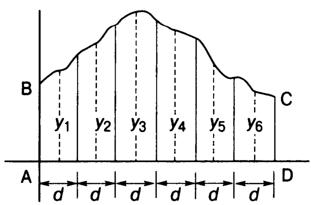


Рис. 2.30

В общем виде формула Симпсона:

$$\text{Площадь} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{ширина}\\ \text{интервала}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\text{первая + последняя}\\ \text{ордината}\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}\text{сумма четных}\\ \text{ординат}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\text{сумма оставшихся}\\ \text{нечетных ординат}\end{pmatrix}\right]$$

Пример. Машина стартует из состояния покоя, и ее скорость измеряется каждую секунду в течение 6 секунд:

Время t [с]	0	1	2	3	4	5	6
Скорость υ [м/с]	0	2.5	5.5	8.75	12.5	17.5	24.0

Определить расстояние, пройденное за 6 секунд (т. е. площадь под графиком υ/t): а) по формуле трапеций, б) по правилу средних ординат, в) по формуле Симпсона.

График зависимости скорости от времени показан на **Рис. 2.31**.

Рис. 2.31

а) *Формула трапеций.*

Время на графике делится на 6 интервалов шириной 1 с и измеряются ординаты. Итак, площадь S определяется формулой

$$S = 1 \times \left[\frac{0 + 24.0}{2} + 2.5 + 5.5 + 8.75 + 12.5 + 17.5\right] = \mathbf{58.75\ м^2}.$$

б) *Правило средних ординат.*

Время на графике делится на 6 интервалов шириной 1 с. На **Рис. 2.31** пунктирной линией показаны средние ординаты. Измерена каждая средняя ордината. Итак,

$$S = 1 \times [1.25 + 4.0 + 7.0 + 10.75 + 15.0 + 20.25] = \mathbf{58.25\ м^2}.$$

в) *Формула Симпсона.*

Время на графике делится на 6 интервалов шириной 1 с и измеряются ординаты. Итак,

$$S = \frac{1}{3}(1)[(0 + 24.0) + 4(2.5 + 8.75 + 17.5) + 2(5.5 + 12.5)] =$$

$$= \mathbf{58.33\ м^2}.$$

2.4.2. Нахождение объемов неправильных тел с использованием формулы Симпсона

Если известны площади поперечных сечений A_1, A_2, A_3, ..., разделенные интервалом шириной d для неправильного тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями (как показано на **Рис. 2.32**), то объем по формуле Симпсона:

$$\boxed{V = \frac{d}{3}[(A_1 + A_7) + 4(A_2 + A_4 + A_6) + 2(A_3 + A_5)]}$$

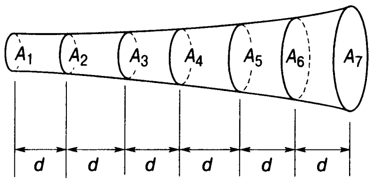


Рис. 2.32

Пример. Ствол дерева длиной 12 метров имеет переменное поперечное сечение. Площади поперечных сечений, измеренные на расстоянии 2 м друг от друга, составляют: 0.52, 0.55, 0.59, 0.63, 0.72, 0.84, 0.97 м^2.

Оценим объем ствола дерева. Ствол дерева похож на набросок на **Рис. 2.32**, где $d = 2$ м, $A_1 = 0.52$ м^2, $A_2 = 0.55$ м^2 и так далее.

Используя формулу Симпсона, получаем

$$V = \frac{2}{3}[(0.52 + 0.97) + 4(0.55 + 0.63 + 0.84) + 2(0.59 + 0.72)] =$$

$$= \frac{2}{3}[1.49 + 8.08 + 2.62] = \mathbf{8.13\ м^3}.$$

2.4.3. Правило призм для определения объемов

Правило призм применимо к телу длиной x, разделенному только тремя равноудаленными поверхностями, как показано на **Рис. 2.33**. Фактически это формула Симпсона, но только для нахождения объемов.

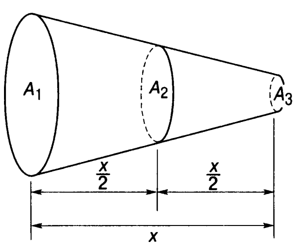


Рис. 2.33

Согласно **Рис. 2.33**, объем

$$\boxed{V = \frac{x}{6}[A_1 + 4A_2 + A_3]}$$

Правило призм позволяет определять точную величину объемов правильных тел, таких как пирамиды, конусы, сферы и призмоиды.

Пример. Ведро имеет форму усеченного конуса. Диаметр его дна 18 см, верха — 30 см. Определим емкость ведра по правилу призм с точностью до литра, если его высота — 24 см.

Ведро показано на **Рис. 2.34**. В центре, т. е. на расстоянии 12 см от дна, радиус $r_2 = (9 + 15)/2 = 12$ см, поскольку радиус изменяется равномерно.

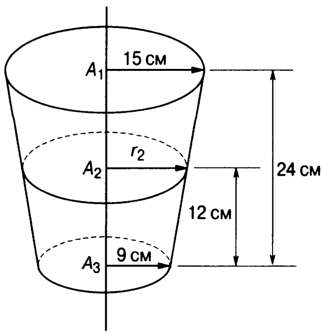


Рис. 2.34

Объем ведра по правилу призм $V = \frac{x}{6}[A_1 + 4A_2 + A_3]$,

где $x = 24$ см, $A_1 = \pi(15)^2$ см^2, $A_2 = \pi(12)^2$ см^2, $A_3 = \pi(9)^2$ см^2.

Следовательно, объем ведра

$$V = \frac{24}{6}[\pi(15)^2 + 4\pi(12)^2 + \pi(9)^2] =$$

$$= 4[706.86 + 1809.56 + 254.47] =$$

$$= 11080 \text{ см}^3 = \frac{11080}{1000} \text{ л} =$$

= **11** л с точностью до литра.

2.4.4. Средняя величина сигнала

Средняя величина y сигнала, показанного на **Рис. 2.35**, определяется по формуле

$$y = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания, } b}.$$

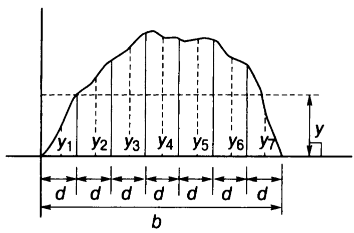


Рис. 2.35

Если для определения площади под кривой (**Рис. 2.35**) используется правило средних ординат, тогда

$$y = \frac{\text{сумма средних ординат}}{\text{количество средних ординат}} =$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7}{7}.$$

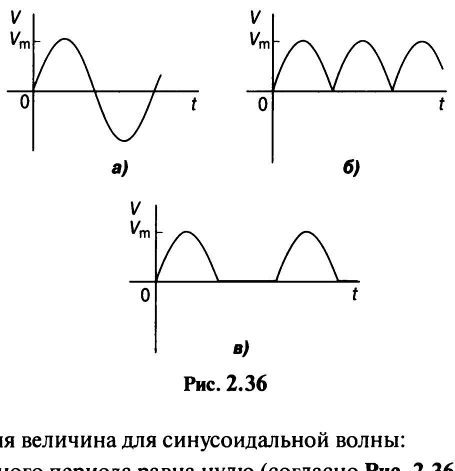


Рис. 2.36

Средняя величина для синусоидальной волны:

- для полного периода равна нулю (согласно **Рис. 2.36а**);
- для полупериода – это 0.637 × максимальная величина, или $2/\pi$ × максимальная величина;
- для двухполупериодного выпрямленного сигнала (**Рис. 2.36б**) — это 0.637 × максимальная величина;

- для полупериодного выпрямленного сигнала (**Рис. 2.36в**) — это $0.318 \times$ максимальная величина, или $1/\pi \times$ максимальная величина.

Пример. Определить средние значения для половины периода периодической волны, показанной на **Рис. 2.37**.

а) Площадь под треугольным сигналом, изображенным на **Рис. 2.37а**, для половины периода определяется так:

Площадь = (основание)(высота), т. е.

$$S = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(20) = 20 \times 10^{-3} \text{ В·с}.$$

$$\text{Средняя величина сигнала} = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{20 \times 10^{-3}\,\text{В·с}}{2 \times 10^{-3}\text{ с}} = \mathbf{10\ В}.$$

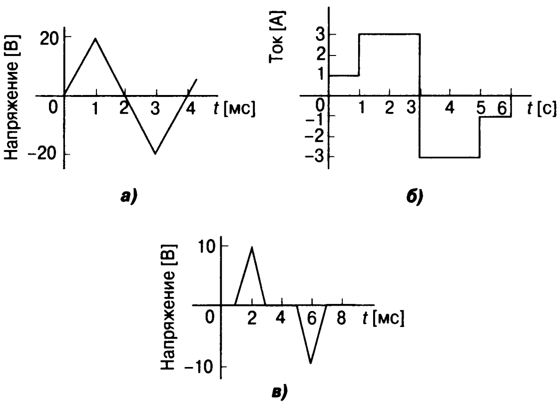


Рис. 2.37

б) Площадь под сигналом, изображенным на **Рис. 2.37б**, для половины периода $= (1 \times 1) + (3 \times 2) = 7$ А·с.

$$\text{Средняя величина сигнала} = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{7\text{ А·с}}{3\text{ с}} = \mathbf{2.33\ А}.$$

в) Половина периода сигнала, изображенного на **Рис. 2.37в**, равняется 4 мс.

$$\text{Площадь под кривой } S = \frac{1}{2}[(3-1)10^{-3}](10) = 10 \times 10^{-3} \text{ В·с}.$$

$$\text{Средняя величина сигнала} = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{10 \times 10^{-3} \text{ В·с}}{4 \times 10^{-3} \text{ с}} = \mathbf{2.5\ В}.$$

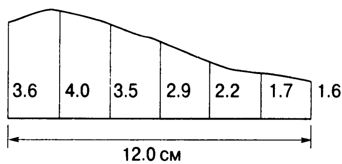


Рис. 2.38

Пример. Индикаторная диаграмма парового двигателя показана на **Рис. 2.38**. Основание разделено на 6 равных интервалов, а длины 7 измеренных ординат приведены в сантиметрах. Определить: а) площадь индикаторной диаграммы с помощью формулы Симпсона, б) среднее давление в цилиндре при условии, что 1 см — это 100 кПа.

а) Ширина каждого интервала составляет $\frac{12.0}{6}$ см. Используя формулу Симпсона, получим, что площадь равна

$$S = \frac{1}{3}(2.0)[(3.6 + 1.6) + 4(4.0 + 2.9 + 1.7) + 2(3.5 + 2.2)] =$$

$$= \frac{2}{3}[(5.2 + 34.4 + 11.4)] = \mathbf{34\ см^2}.$$

$$\text{б) Средняя высота ординат} = \frac{\text{площадь диаграммы}}{\text{длина основания}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{34}{12} = 2.83 \text{ см}.$$

Поскольку 1 см представляет 100 кПа, то среднее давление в цилиндре будет 2.83 см × 100 кПа/см = **283 кПа**.

Глава 3

Геометрия и тригонометрия

3.1. ГЕОМЕТРИЯ И ТРЕУГОЛЬНИКИ

3.1.1. Единицы измерения углов

Геометрия — это раздел математики, изучающий свойства точек, прямых, поверхностей и тел.

Угол — это мера поворота одной прямой линии относительно другой.

Углы могут быть измерены в *градусах* или *радианах* (см. разд. 2.2).

1 оборот = 360 градусов; таким образом, 1 градус = $\frac{1}{360}$ доля полного оборота. Далее, 1 минута = $\frac{1}{60}$ градуса и 1 секунда = = $\frac{1}{60}$ минуты. 1 минута записывается как 1′, 1 секунда — 1″. Таким образом, **1° = 60′ и 1′ = 60″**.

Пример. Вычислить: а) 13°42′51″ + 48°22′17″, б) 37°12′8″ − − 21°17′25″.

а)

$$\begin{array}{r} 13°42'51'' \\ +\ 48°22'17'' \\ \hline \text{Складываем:}\quad \mathbf{62°\ 5'\ 8''} \\ \mathbf{1°\ 1'} \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} 36°11' \\ -\ \cancel{37}°\cancel{12}'\ 8'' \\ 21°17'25'' \\ \hline \text{Вычитаем:}\quad \mathbf{15°54'43''} \end{array}$$

Пример. Преобразовать 78°15′26″ в градусы.

Поскольку 1 секунда = $\frac{1}{60}$ минуты,

$$26'' = \left(\frac{26}{60}\right)' = 0.4333'.$$

Следовательно, 78°15′26″= 78°15.43′, а

$15.4333' = \left(\frac{15.43}{60}\right)^{\circ} = 0.2572°$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Итак, **78°15′26″ = 78.26°** с точностью до 4 значащих цифр.

3.1.2. Виды и свойства углов

Любой угол между 0° и 90° называется *острым углом.*

Угол, равный 90°, называется *прямым углом.*

Любой угол между 90° и 180° называется *тупым углом.*

Угол 180° называется *развернутым углом.*

Если два угла в сумме составляют 90°, они называются *дополнительными углами до прямого угла.*

Если два угла составляют в сумме 180°, их называют *дополнительными углами до развернутого угла 180°.*

Параллельные прямые — это лежащие в одной плоскости прямые, которые нигде не пересекаются. (Подобные прямые отмечены стрелками на **Рис. 3.1**.)

Прямая, пересекающая две параллельные прямые, называется *секущей* (например, MN на **Рис. 3.2**).

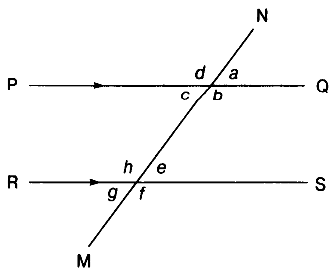


Рис. 3.1

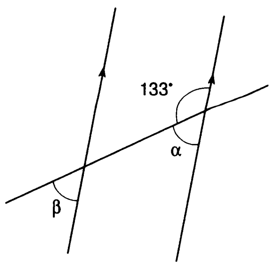


Рис. 3.2

Из **Рис. 3.1** видно, что:

$a = c$, $b = d$, $e = g$ и $f = h$. Такие пары углов называют *вертикальными.*

$a = e$, $b = f$, $c = g$ и $d = h$. Подобные пары углов называют *соответственными.*

$c = e$ и $b = h$. Такие пары углов называют *накрест лежащими.*

$b + e = 180°$ и $c + h = 180°$. Такие пары углов называют *внутренними.*

Например, угол, дополнительный до прямого угла к 58°39′, — это (90° – 58°39′), т. е. **31°21′**; а дополнительный до 180° угол для 111°11′ — это (180° – 111°11′), т. е. **68°49′**.

Пример. Определить угол β на **Рис. 3.2**.

$\alpha = 180° - 133° = 47°$ (т. е. это дополнительные углы).

$\alpha = \beta = \mathbf{47°}$ (соответственные углы между параллельными прямыми).

Пример. Определить величину угла θ на **Рис. 3.3**.

Пусть прямая FG проходит через точку E таким образом, что FG параллельна AB и CD. ∠BAE = ∠AEF (накрест лежащие углы между параллельными прямыми AB и FG), следовательно, $\angle AEF = 23°37'$. $\angle ECD = \angle FEC$ (накрест лежащие углы между параллельными прямыми FG и CD), значит, $\angle FEC = 35°49'$.

$\angle\theta = \angle AEF + \angle FEC = 23°37' + 35°49' = \mathbf{59°26'}$

Пример. Определить углы c и d на **Рис. 3.4**.

$b = 46°$ (соответственные углы между параллельными прямыми).

Кроме того, $b + c + 90° = 180°$ (углы на прямой).

$46° + c + 90° = 180°$, значит, $\mathbf{c = 44°}$.

b и d — дополнительные до 180°, следовательно, $d = 180° - 46° = \mathbf{134°}$.

Или же $90° + c = d$ (вертикальные углы).

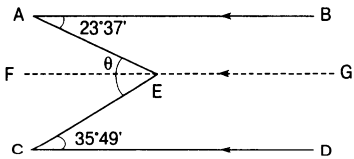


Рис. 3.3

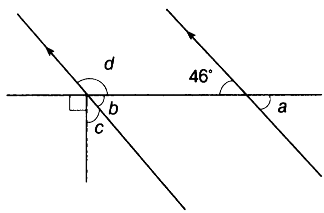


Рис. 3.4

3.1.3. Свойства треугольников

Треугольник — это фигура, ограниченная тремя прямыми. Сумма трех углов в треугольнике равна 180°. Виды треугольников:

- *Остроугольный треугольник* — это треугольник, в котором все три угла острые, т. е. меньше 90°.
- *Прямоугольный треугольник* — треугольник, содержащий прямой угол.
- *Тупоугольный треугольник* — треугольник, содержащий тупой угол, т. е. один из его углов лежит в пределах между 90° и 180°.
- *Равносторонний треугольник* — это треугольник, у которого все стороны и все углы равны (каждый угол равен 60°).
- *Равнобедренный треугольник* — треугольник, у которого два угла и две стороны равны.

- *Разносторонний треугольник* — треугольник, в котором все углы, а значит, и все стороны попарно различны.

Рассмотрим **Рис. 3.5**:

- Углы A, B и C называются *внутренними углами* треугольника.
- Угол θ называется *внешним углом* треугольника, он равен сумме двух противолежащих ему внутренних углов, т. е. $\theta = A + C$.
- $a + b + c$ называется *периметром* треугольника.

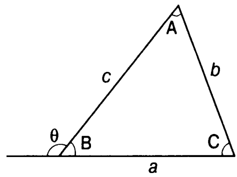


Рис. 3.5

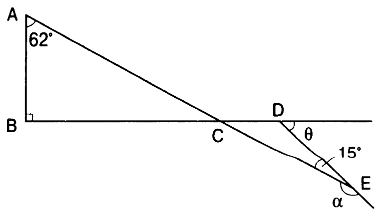


Рис. 3.6

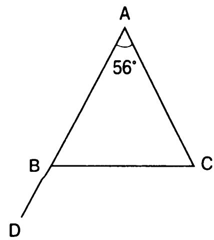


Рис. 3.7

Пример. Определить величины θ и α на **Рис. 3.6**.

В треугольнике ABC $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (сумма углов в треугольнике всегда равна 180°); следовательно, $\angle C = 180° - 90° - 62° = 28°$. Таким образом, $\angle DCE = 28°$ (вертикальные углы). $\angle\theta = \angle DCE + \angle DEC$ (внешний угол треугольника равен сумме двух противолежащих ему внутренних углов). Следовательно, $\angle\theta = 28° + 15° = \mathbf{43}°$.

$\angle\alpha$ и $\angle DEC$ — дополнительные до 180°, следовательно, $\alpha = 180° - 15° = \mathbf{165}°$.

Пример. ABC — это равнобедренный треугольник, в котором угол BAC равен 56°. Отрезок AB продлен до точки D, как показано на **Рис. 3.7**. Найти угол DBC.

Поскольку три внутренних угла треугольника в сумме дают 180°, значит,

$56° + \angle B + \angle C = 180°$, т. е. $\angle B + \angle C = 180° - 56° = 124°$.

Треугольник ABC равнобедренный, следовательно, $\angle B = \angle C = \dfrac{124°}{2} = 62°$.

Так как внешний угол равен сумме двух противолежащих ему внутренних углов, то $\angle DBC = \angle A + \angle C$.

То есть $\angle DBC = 56° + 62° = \mathbf{118}°$.

Или же $\angle DBC + \angle ABC = 180°$ (это дополнительные до 180° углы).

3.1.4. Конгруэнтные треугольники

Два треугольника называются *конгруэнтными* (равными), если они равны по всем параметрам, т. е. три угла и три стороны одного треугольника равны трем углам и трем сторонам другого треугольника. Два треугольника конгруэнтны, если:

- Три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника (SSS).
- Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами также равны (SAS).
- Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, и любая сторона первого треугольника равна соответствующей стороне другого треугольника (ASA).
- Их гипотенузы равны, и один катет треугольника равен соответствующему катету другого треугольника (RHS).

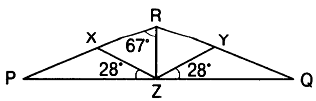


Рис. 3.8

Пример. На **Рис. 3.8** изображен равнобедренный треугольник PQR, точка Z лежит на середине PQ. Доказать, что треугольники PXZ и QYZ, а также RXZ и RYZ конгруэнтны, и найти величины углов RPZ и RXZ.

Поскольку треугольник PQR равнобедренный, то PR = RQ, следовательно, $\angle QPR = \angle RQP$.

$\angle RXZ = \angle QPR + 28°$ и $\angle RYZ = \angle RQP + 28°$ (внешний угол треугольника равен сумме двух противолежащих ему внутренних углов). Следовательно, $\angle RXZ = \angle RYZ$.

$\angle PXZ = 180° - \angle RXZ$ и $\angle QYZ = 180° - \angle RYZ$. Таким образом, $\angle PXZ = \angle QYZ$.

Треугольники PXZ и QYZ конгруэнтны, поскольку $\angle XPZ = \angle YQZ$, PZ = ZQ и $\angle XZP = \angle YZQ$ (ASA). Следовательно, XZ = YZ.

Треугольники PRZ и QRZ конгруэнтны, поскольку PR = RQ, $\angle RPZ = \angle RQZ$ и PZ = ZQ (SAS). Следовательно, $\angle RZX = \angle RZY$.

Треугольники RXZ и RYZ конгруэнтны, поскольку $\angle RXZ = \angle RYZ$, XZ = YZ и $\angle RZX = \angle RZY$ (ASA). $\angle QRZ = 67°$, значит, $\angle PRQ = 67° + 67° = 134°$.

Следовательно, $\angle RPZ = \angle RQZ = \dfrac{180° - 134°}{2} = 23°$ и $\angle RXZ = 23° + 28° = \mathbf{51°}$.

3.1.5. Подобные треугольники

Два треугольника являются *подобными*, если углы одного треугольника равны углам другого треугольника. На **Рис. 3.9** треугольники ABC и PQR подобны, а соответствующие стороны пропорциональны, т. е.

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}.$$

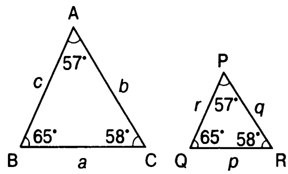


Рис. 3.9

Пример. Найти длину стороны a на **Рис. 3.10**.

В треугольнике ABC $50° + 70° + \angle C = 180°$, откуда $\angle C = 60°$.

В треугольнике DEF $\angle E = 180° - 50° - 60° = 70°$. Следовательно, треугольники ABC и DEF подобны, так как их углы равны. Значит, соответствующие стороны пропорциональны:

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f}, \text{ т. е. } \frac{a}{4.42} = \frac{12.0}{5.0}.$$

Следовательно, $a = \dfrac{12.0}{5.0}(4.42) =$ **10.61 см**.

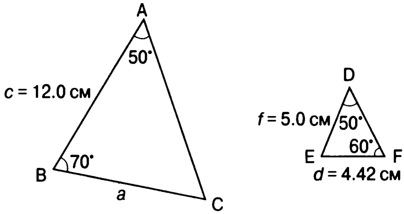


Рис. 3.10

3.1.6. Построение треугольников

Чтобы построить любой треугольник, необходимы следующие инструменты: линейка, циркуль, транспортир, карандаш.

Пример. Построить треугольник со сторонами 6 см, 5 см и 3 см (см. **Рис. 3.11**).

а) Чертим прямую линию любой длины и циркулем отмеряем на ней длину 6 см; обозначаем ее AB.

б) Устанавливаем раствор циркуля на 5 см и описываем дугу DE с центром в точке A.
в) Устанавливаем раствор циркуля на 3 см и описываем дугу FG с центром в точке B.
г) Пересечение двух кривых в точке C — вершина нашего треугольника. Соединяем AC и BC прямыми линиями.

Измерением можно показать, что отношение углов в треугольнике не равняется отношению сторон (т. е. в данной задаче угол, противолежащий стороне 3 см, не равняется половине угла, противолежащего стороне 6 см).

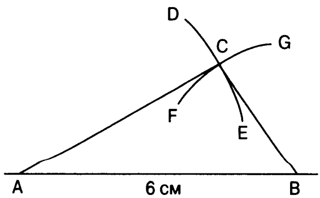


Рис. 3.11

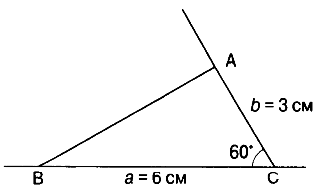


Рис. 3.12

Пример. Построить треугольник ABC со сторонами $a = 6$ см, $b = 3$ см и $\angle C = 60°$ (см. **Рис. 3.12**).
а) Чертим отрезок BC длиной 6 см.
б) Поместив центр транспортира в точку C, откладываем от BC угол 60°.
в) Отмеряем от C длину 3 см и ставим точку A.
г) Соединяем B и A прямой линией.

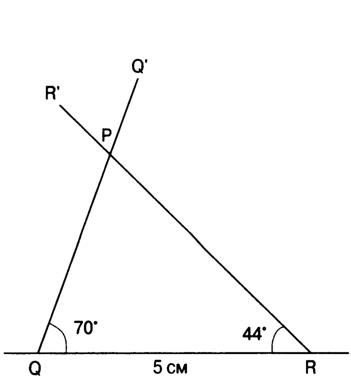


Рис. 3.13

Пример. Построить треугольник PQR при условии, что QR = 5 см, $\angle Q = 70°$ и $\angle R = 44°$ (см. **Рис. 3.13**)

а) Чертим отрезок длиной 5 см и обозначаем его QR.

б) Поместив центр транспортира в точку Q, строим угол 70°. Обозначаем полученную прямую QQ′.

в) Поместив центр транспортира в точку R, строим угол 44°. Обозначаем полученную прямую RR′.

г) Пересечение QQ′ и RR′ задает вершину треугольника P.

3.2. ВВЕДЕНИЕ В ТРИГОНОМЕТРИЮ

Тригонометрия — это раздел математики, посвященный измерению сторон и углов треугольников и их соотношениям. В инженерном деле есть множество областей, где требуется знание тригонометрии.

3.2.1. Теорема Пифагора

Сторона треугольника, противолежащая прямому углу (т. е. сторона b на **Рис. 3.14**), называется *гипотенузой*. *Теорема Пифагора* гласит:

> ***В любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон (катетов):***
>
> $b^2 = a^2 + c^2$.

Пример. Найти длину EF (см. **Рис. 3.15**). По теореме Пифагора

$$e^2 = d^2 + f^2.$$

Следовательно,

$$13^2 = d^2 + 5^2,$$
$$169 = d^2 + 125,$$
$$d^2 = 169 - 25 = 144,$$
$$d = \sqrt{144} = 12 \text{ см}.$$

Итак, EF = **12 см**.

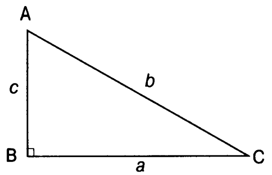


Рис. 3.14

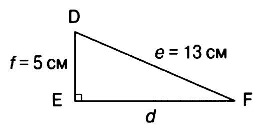


Рис. 3.15

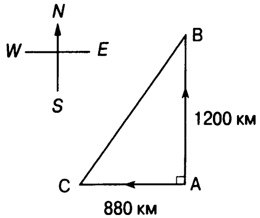


Рис. 3.16

Пример. Два самолета взлетают с аэродрома в одно и то же время. Один летит на север со средней скоростью 300 км/ч, второй — на запад со скоростью 220 км/ч. Вычислить расстояние между ними через 4 часа.

Через 4 часа первый самолет пролетел $4 \times 300 = 1200$ км на север, а второй — $4 \times 220 = 880$ км на запад, как показано на **Рис. 3.16.** Расстояние между самолетами через 4 часа — это BC.

Согласно теореме Пифагора:

$$BC^2 = 1200^2 + 880^2 = 1\,440\,000 + 774\,400,$$

откуда $BC = \sqrt{2214400}$.

Следовательно, расстояние между самолетами через 4 часа равно 1488 км.

3.2.2. Тригонометрические функции острых углов

Для прямоугольного треугольника на **Рис. 3.17**

- синус $\theta = \dfrac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$, т. е. $\sin\theta = \dfrac{b}{c}$;
- косинус $\theta = \dfrac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$, т. е. $\cos\theta = \dfrac{a}{c}$;
- тангенс $\theta = \dfrac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$, т. е. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$;
- секанс $\theta = \dfrac{\text{гипотенуза}}{\text{прилежащий катет}}$, т. е. $\sec\theta = \dfrac{c}{a}$;
- косеканс $\theta = \dfrac{\text{гипотенуза}}{\text{противолежащий катет}}$, т. е. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{c}{b}$;
- котангенс $\theta = \dfrac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$, т. е. $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{a}{b}$.

Из сказанного выше следует, что

- $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\theta$, т. е. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$;

- $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b} = \operatorname{ctg}\theta$, т. е. $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$;
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$;
- $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$;
- $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}$.

Пример. Найти пять остальных тригонометрических функций, если $\cos X = \dfrac{9}{41}$.

На **Рис 3.18** показан прямоугольный треугольник XYZ.

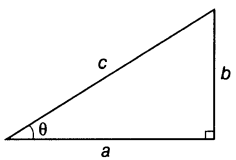


Рис. 3.17

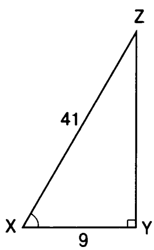


Рис. 3.18

Поскольку $\cos X = \dfrac{9}{41}$, значит, XY = 9 единиц, а XZ = 41 единица.

Согласно теореме Пифагора, $41^2 = 9^2 + YZ^2$, откуда $YZ = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ единиц.

Таким образом,

$$\sin X = \frac{40}{41},\quad \operatorname{tg} X = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9},\quad \operatorname{cosec} X = \frac{41}{40} = 1\frac{1}{40},$$

$$\sec X = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} X = \frac{9}{40}.$$

3.2.3. Дробные и иррациональные формы записи тригонометрических величин

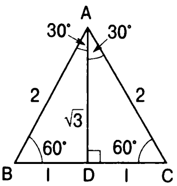


Рис. 3.19

На **Рис. 3.19** ABC — это равносторонний треугольник со стороной 2 единицы. AD делит пополам угол A и сторону BC. Применим к треугольнику ABC теорему Пифагора:

$$AD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{tg } 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

и

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ tg } 60° = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}.$$

Согласно **Рис. 3.20,** треугольник PQR является равнобедренным со сторонами PQ = QR = 1 единица. По теореме Пифагора

$$PR = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\text{tg } 45° = 1$.

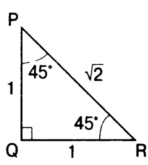


Рис. 3.20

Величина, которая не может быть точно выражена в виде рационального числа, называется *иррациональной*. Например, величины $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ называются иррациональными, поскольку их нельзя выразить в виде дроби, а их мантисса бесконечна.

Например,

$\sqrt{2} = 1.4142135...$ и $\sqrt{3} = 1.7320508....$

Из сказанного выше следует, что $\sin 30° = \cos 60°$, $\sin 45° = \cos 45°$, $\sin 60° = \cos 30°$.

В общем виде: $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$ и $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$.

Например, с помощью калькулятора можно проверить, что $\sin 25° = \cos 65°$, $\sin 42° = \cos 48°$, $\cos 84°10' = \sin 5°50'$ и так далее.

Пример. Найти $\dfrac{3\text{tg } 60° - 2\cos 30°}{\text{tg } 30°}$ в иррациональной форме.

Из сказанного выше следует:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{; следовательно,}$$

$$\frac{3\operatorname{tg} 60^\circ - 2\cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 2(3) = \mathbf{6}.$$

3.2.4. Решение прямоугольных треугольников

«Решить прямоугольный треугольник» означает найти все неизвестные стороны и углы. Для этого применяют теорему Пифагора и/или тригонометрические соотношения.

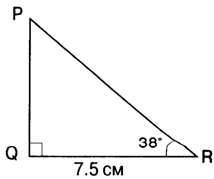


Рис. 3.21

Пример. Найти стороны PQ и PR в треугольнике PQR, показанном на **Рис. 3.21**.

$$\operatorname{tg} 38^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{PQ}{7.5},$$

следовательно, PQ = 7.5 tg 38° = 7.5(0.7813) = **5.860 см**.

$$\cos 38^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{7.5}{PR},$$

следовательно, $PR = \frac{7.5}{\cos 38^\circ} = \frac{7.5}{0.7880} = \mathbf{9.518}$ **см**.

Проверка. Применим теорему Пифагора:

$$(7.5)^2 + (5.860)^2 = 90.59 = (9.518)^2.$$

3.2.5. Угол места и угол понижения

На **Рис. 3.22** отрезок CB представляет плоскость земли, а AB — вертикальный флагшток. Тогда *угол места* верха флагштока A относительно точки C — это угол между воображаемой прямой AC и горизонталью CB, т. е. угол θ.

На **Рис. 3.23** отрезок PQ представляет вертикальный обрыв, а *R* – корабль в море. Тогда *угол понижения* корабля относительно точки *P* — это угол между воображаемой прямой PR и горизонталью, т. е. угол φ. (Отметим, что ∠PRQ также равен углу φ — это накрест лежащие углы при параллельных прямых.)

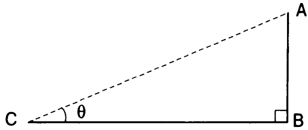


Рис. 3.22

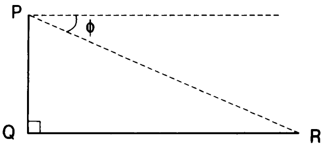


Рис. 3.23

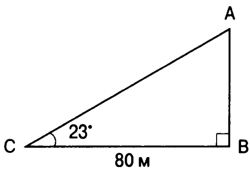


Рис. 3.24

Пример. Опора ЛЭП стоит на горизонтальной поверхности земли. В точке на расстоянии 80 м от основания опоры угол места для верха опоры составляет 23°. Вычислить высоту опоры с точностью до метра.

На **Рис. 3.24** показана опора AB и угол места *A* относительно точки C = 23°. Значит, $\text{tg } 23° = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{80}$.

Следовательно, высота опоры

AB = 80 tg 23° = 80(0.4245) = 33.96 м = **34 м** с точностью до метра.

Пример. Угол понижения корабля, наблюдаемого с вершины утеса на расстоянии 75 м, составляет 30°. Корабль плывет от утеса с постоянной скоростью, и через минуту его угол понижения относительно утеса составляет 20°. Определить: а) расстояние между кораблем и утесом, б) скорость корабля в м/с.

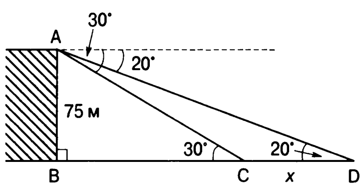


Рис. 3.25

а) На **Рис. 3.25** показан утес AB, начальное положение корабля в точке C и конечное в точке D. Поскольку начальный угол понижения равен 30°, значит, ∠ACB = 30° (накрест лежащие углы между параллельными прямыми).

$$\text{tg } 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{75}{BC},$$

следовательно, начальное положение корабля относительно утеса

$$BC = \frac{75}{\text{tg } 30°} = \frac{75}{0.5774} = \mathbf{129.9 \text{ м}}.$$

б) В треугольнике ABD, $\text{tg } 20° = \frac{AB}{BD} = \frac{75}{BC + CD} = \frac{75}{129.9 + x}$.

Следовательно,

$$129.9 + x = \frac{75}{\text{tg } 20°} = \frac{75}{0.3640} = 206.0 \text{ м},$$

откуда $x = 206.0 - 129.9 = 76.1$ м.

Таким образом, корабль проплывает 76.1 м за минуту, т. е. за 60 с. Следовательно,

$$\text{скорость корабля} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время}} = \frac{76.1}{60} \text{ м/с} =$$

$$= \frac{76.1 \times 60 \times 60}{60 \times 1000} \text{км/ч} = \mathbf{4.57 \text{ км/ч}}.$$

3.2.6. Вычисление тригонометрических функций

Существуют четырехзначные таблицы значений синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90°. Однако самый простой способ вычисления тригонометрических функций для любого угла — это использование *калькулятора*.

Можно проверить следующие значения с точностью до 4 знаков после десятичной точки:

$\sin 18° = 0.3090$	$\cos 56° = 0.5592$
$\sin 172° = 0.1392$	$\cos 115° = -0.4226$
$\sin 241.63° = -0.8799$	$\cos 331.78° = 0.8811$
$\text{tg } 29° = 0.5543$	$\text{tg } 296.42° = -2.017$
$\text{tg } 178° = -0.0349$	

Чтобы вычислить с помощью калькулятора, скажем, 47°23′, надо найти $42\frac{23°}{60}$, поскольку в 1 градусе 60 минут.

$$\frac{23}{60} = 0.3833, \text{таким образом, } 42°23' = 42.3833°.$$

Аналогично $42°23' = 42.3833 = 0.6741$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Аналогично $\cos 72°38' = \cos\left(72\frac{38°}{60}\right) = 0.2985$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Большинство калькуляторов имеют только функции синуса, косинуса и тангенса. Поэтому, чтобы найти секансы, косекансы и котангенсы, необходимо использовать обратные величины.

Можно проверить следующие значения с точностью до 4 знаков после десятичной точки:

$$\sec 32^\circ = \frac{1}{\cos 32^\circ} = 1.1792;$$

$$\sec 215.12^\circ = \frac{1}{\cos 215.12^\circ} = -1.2226;$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \frac{1}{\sin 75^\circ} = 1.0353;$$

$$\operatorname{cosec} 321.62^\circ = \frac{1}{\sin 321.62^\circ} = -1.6106;$$

$$\operatorname{ctg} 41^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 41^\circ} = 1.1504;$$

$$\operatorname{ctg} 263.59^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 263.59^\circ} = 0.1123.$$

Пример. Найти с точностью до 4 значащих цифр: а) sin 1.481, б) tg 2.93, в) sec 5.37, г) cosec $\pi/4$.

а) sin 1.481 — это синус 1.481 радиан. Значит, надо переключить калькулятор на радианы. Находим sin 1.481 = **0.9960**.

б) tg 2.93 = **–0.2148**.

в) $\sec 5.37 = \dfrac{1}{\cos 5.37} = \mathbf{1.6361}$.

г) $\operatorname{cosec}(\pi/4) = \dfrac{1}{\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sin 0.785398\ldots} = \mathbf{1.4142}$.

Пример. Найти острые углы: а) arcsec 2.3164, б) arccosec 1.1784.

а) $$\operatorname{arcsec} 2.3164 = \arccos\left(\frac{1}{2.3164}\right) = \arccos 0.4317\ldots =$$

$$= \mathbf{64.42^\circ = 64^\circ 25' = 1.124}\ \textbf{радиан}.$$

б) $$\operatorname{arccosec} 1.1784 = \arcsin\left(\frac{1}{1.1784}\right) = \arcsin 0.8486 =$$

$$= \mathbf{58.06^\circ = 58^\circ 4' = 1.013}\ \textbf{радиан}.$$

Пример. Найти с точностью до 4 знаков после десятичной точки: а) sec (–115°), б) cosec (–95°47′).

а) Положительными углами считаются углы, отложенные против часовой стрелки, отрицательными — по часовой.
Значит, –115° — это то же самое, что и 245° (т. е. 360° – 115°).
Следовательно,

$$\sec(-115°) = \sec 245° = \frac{1}{\cos 245°} = \mathbf{-2.3662}.$$

б) $$\operatorname{cosec}(-95°47') = \frac{1}{\sin\left(-95\frac{47°}{60}\right)} = \mathbf{1.0051}.$$

3.3. ДЕКАРТОВЫ И ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

3.3.1. Введение

Существует два способа представления положения точки на плоскости. Это: а) *декартова система координат*, т. е. (x, y), и б) *полярная система координат*, т. е. (r, θ), где r — это расстояние между данной точкой и началом координат, а θ — угол между радиусом-вектором к этой точке и осью абсцисс.

3.3.2. Переход из декартовой в полярную систему координат

На **Рис. 3.26** при известных значениях x и y величину r можно найти по теореме Пифагора (см. разд. 3.3), поскольку треугольник OQP прямоугольный.

Следовательно, $r^2 = (x^2 + y^2)$, откуда

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Из определения тригонометрических функций $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$, откуда

$$\boxed{\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Две формулы, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, необходимы для перехода из декартовой в полярную систему координат. Угол θ, который может быть выражен в градусах или радианах, ***всегда*** должен измеряться от положительного направления оси x; на **Рис. 3.26** — это линия OQ.

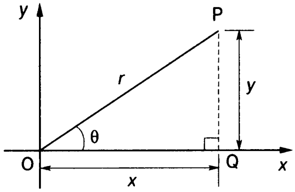


Рис. 3.26

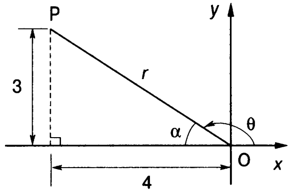


Рис. 3.27

При переходе из декартовой в полярную систему координат всегда следует строить чертеж.

Пример. Выразить в полярных координатах точку (–4, 3).

Положение точки с декартовыми координатами показано на **Рис. 3.27**.

По теореме Пифагора $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Из определения тригонометрических функций

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36.87°, \text{ или } 0.644 \text{ радиан}.$$

Следовательно,

$$\theta = 180° - 36.87° = 143.13°, \text{ или } \theta = \pi - 0.644 = 2.498 \text{ радиан.}$$

Следовательно, положение точки *P* в полярных координатах — (5, 143.13°), или (5, 2.498 рад).

Пример. Выразить (–5, –12) в полярных координатах.

Положение точки (–5, –12) показано на **Рис. 3.28**.

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} = 67.38°, \text{ или } 1.176 \text{ радиан}.$$

Следовательно, $\theta = 180° + 67.38° = 247.38°$, или $\theta = \pi + 1.176 = 4.318$ радиан.

Итак, (–5, –12) в декартовой системе координат в полярных координатах соответствует (13, 247.38°), или (13, 4.318 рад).

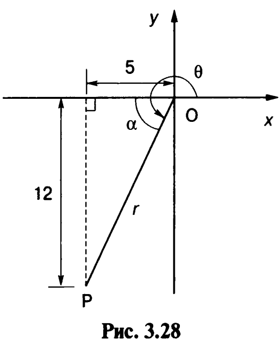


Рис. 3.28

3.3.3. Переход из полярной в декартову систему координат

Из прямоугольного треугольника OPQ на **Рис. 3.29**:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ и } \sin\theta = \frac{y}{r},$$

согласно определению тригонометрических функций. Следовательно,

$$\boxed{x = r\cos\theta} \text{ и } \boxed{y = r\sin\theta}$$

Если известна длина r и угол θ, то $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ — формулы, необходимые для перехода из полярной в декартову систему координат.

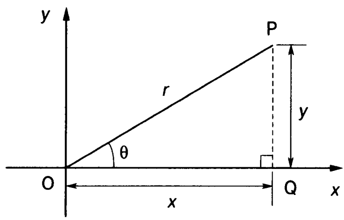


Рис. 3.29

Пример. Выразить (6, 137°) в декартовой системе координат. Положение точки (6, 137°) показано на **Рис. 3.30**.

$$x = r\cos\theta = 6\cos 137° = -4.388,$$

что соответствует длине отрезка OA на **Рис. 3.30**.

$$y = r\sin\theta = 6\sin 137° = 4.092,$$

что соответствует длине отрезка AB на **Рис. 3.30**.

Итак, (6, 137°) в полярной системе координат соответствует (–4.388, 4.092) в декартовой системе координат.

(Отметим, что при переходе от полярных к декартовым координатам изображать положение точек на координатной плоскости не нужно. Использование формул $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ позволяет автоматически получить правильные знаки в декартовых координатах.)

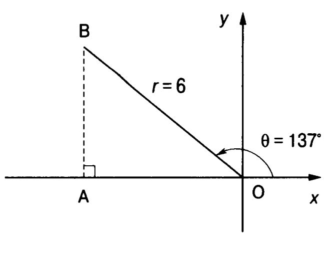


Рис. 3.30

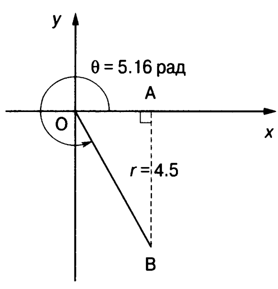


Рис. 3.31

Пример. Выразить (4.5, 5.16 рад) в декартовых координатах. Положение точки (4.5, 5.16 рад) показано на **Рис. 3.31**.

$$x = r\cos\theta = 4.5\cos 5.16 = 1.948,$$

что соответствует длине отрезка OA на **Рис. 3.31**.

$$y = r\sin\theta = 4.5\sin 5.16 = -4.057,$$

что соответствует длине отрезка AB на **Рис. 3.31**.

Итак, (1.948, –4.057) в декартовой системе координат соответствует (4.5, 5.16 рад) в полярной системе координат.

3.3.4. Использование функций калькулятора R → P и P → R

Второе название декартовой системы координат — *прямоугольная* система координат. Многие инженерные калькуляторы имеют функции R → P и P → R. R — это первая буква слова «прямоугольный»[1], а P — первая буква слова «полярный»[2]. Просмотрите инструкцию к вашему калькулятору, чтобы узнать, есть ли в нем эти функции. С их помощью можно легко осуществлять преобразование из декартовой в полярную систему координат и наоборот.

3.4. ТРЕУГОЛЬНИКИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

3.4.1. Теоремы синусов и косинусов

Решить треугольник означает найти значения неизвестных сторон и углов. Если треугольник *прямоугольный*, для его решения можно использовать определения тригонометрических функций и теорему Пифагора, что было рассмотрено в разд. 3.2. Однако для *непрямоугольного* треугольника определения тригонометрических функций и теорему Пифагора использовать ***нельзя***. Вместо них используются два правила, называемые *теорема синусов* и *теорема косинусов*.

Теорема синусов

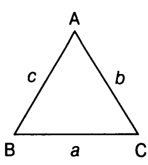


Рис. 3.32

Для треугольника ABC на **Рис. 3.32** *теорема синусов* имеет вид

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

[1] От Rectangular — прямоугольный.
[2] От Polar — полярный.

Данная теорема может быть использована, только если:

- известны 1 сторона и любые 2 угла треугольника, или
- известны 2 стороны и угол (не заключенный между этими сторонами).

Теорема косинусов

Для треугольника ABC на **Рис. 3.32** *теорема косинусов* имеет вид

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

или

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

или

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Данная теорема может быть использована, только если:

- известны две стороны треугольника и заключенный между ними угол или
- известны три стороны треугольника.

3.4.2. Площадь треугольника

Площадь треугольника, например, ABC на **Рис. 3.32** дается следующими формулами:

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times$ основание $\times$ высота,
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$, или $\frac{1}{2}ac\sin B$, или $\frac{1}{2}bc\sin A$,
- $S_{ABC} = \sqrt{[s(s-1)(s-b)(s-c)]}$, где $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Пример. В треугольнике XYZ $\angle X = 51°$, $\angle Y = 67°$ и $YZ = 15.2$ см. Решить треугольник и найти его площадь.

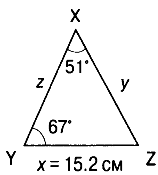


Рис. 3.33

Треугольник XYZ показан на **Рис. 3.33**. Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $Z = 180° - 51° - 67° = \mathbf{62°}$. Используем теорему синусов:

$$\frac{15.2}{\sin 51°} = \frac{y}{\sin 67°} = \frac{z}{\sin 62°}.$$

Из $\dfrac{15.2}{\sin 51°} = \dfrac{y}{\sin 67°}$ находим $y = \dfrac{15.2\sin 67°}{\sin 51°} = \mathbf{18.00}$ **см** $=$ **XZ**.

Из $\frac{15.2}{\sin 51°} = \frac{z}{\sin 62°}$ находим $z = \frac{15.2 \sin 62°}{\sin 51°} = \mathbf{17.27}$ **см** = **XY**.

Площадь треугольника XYZ

$$S_{XYZ} = \frac{1}{2}xy\sin Z = \frac{1}{2}(15.2)(18.00)\sin 62° = \mathbf{120.8\ см^2}$$

(или $S_{XYZ} = \frac{1}{2}xz\sin Y = \frac{1}{2}(15.2)(17.27)\sin 67° = \mathbf{120.8\ см^2}$).

При решении треугольников всегда следует проверять, что самая длинная сторона противолежит самому большому углу, и наоборот. В данной задаче самый большой угол — Y, а самая большая сторона — XZ.

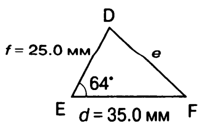


Рис. 3.34

Пример. Решить треугольник DEF и найти его площадь, если EF = 35.0 мм, DE = 25.0 мм и $\angle E = 64°$.

Треугольник DEF показан на **Рис. 3.34**. Используем теорему косинусов:

$$e^2 = d^2 + f^2 - 2df\cos E, \text{ т. е.}$$

$$e^2 = (35.0)^2 + (25.0)^2 - [2(35.0)(25.0)\cos 64] =$$
$$= 1225 + 625 - 767.1 = 1083,$$

откуда

$$e = \sqrt{1083} = \mathbf{32.91\ мм.}$$

Используем теорему синусов: $\frac{32.91}{\sin 64°} = \frac{25.0}{\sin F}$, откуда

$$\sin F = \frac{25.0 \sin 64°}{32.91} = 0.6828\,.$$

Итак, $\angle F = \arcsin 0.62828 = 43°4'$ или $136°56'$.

F = 136°56′ не подходит, поскольку в этом случае 136°56′ + 64° больше 180°. Таким образом, только **F = 43°4′** — верное значение.

$$\angle D = 180° - 64° - 43°4' = \mathbf{72°56'}.$$

Площадь треугольника DEF:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}df\sin E = \frac{1}{2}(35.0)(25.0)\sin 64° = \mathbf{393.2\ мм^2}.$$

3.4.3. Практические задачи с использованием тригонометрии

Существует ряд *практических ситуаций*, в которых необходимо использовать тригонометрию для определения неизвестных сторон и углов треугольников.

Пример. Здание шириной 8.0 м имеет двускатную крышу с наклоном 33° с одной стороны и 40° — с другой (**Рис. 3.35**). Найти длину скатов крыши с точностью до сантиметра.

Угол конька крыши B = 180° – 33° – 40° = 107°.

По теореме синусов: $\frac{8.0}{\sin 107°} = \frac{a}{\sin 33°}$, откуда

$$a = \frac{8.0 \sin 33°}{\sin 107°} = 4.556 \text{ м}.$$

Также по теореме синусов: $\frac{8.0}{\sin 107°} = \frac{c}{\sin 40°}$, откуда

$$c = \frac{8.0 \sin\ 40°}{\sin 107°} = 5.377 \text{ м}.$$

Следовательно, длины скатов крыши равны 4.56 м и 5.38 м с точностью до сантиметра.

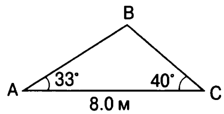


Рис. 3.35

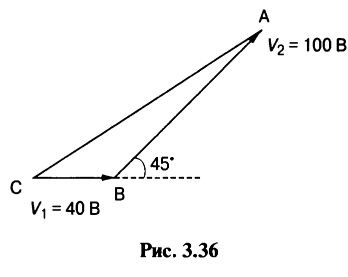


Рис. 3.36

Пример. На **Рис. 3.36** показаны два вектора напряжения, $V_1 = 40$ В и $V_2 = 100$ В. Определить величину результирующего вектора (т. е. длину CA) и угол между результирующим вектором и V_1.

$\angle CBA = 180° - 45° = 135°$.

Согласно теореме косинусов:

$$CA^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos CBA =$$

$$= 40^2 + 100^2 - [2(40)(100)\cos 135°] = 1600 + 10000 - [-5657] =$$
$$= 1600 + 10000 + 5657 = 17257.$$

Результирующий вектор CA $= \sqrt{17257} = 131.4$ В.

Согласно теореме синусов,

$$\frac{131.4}{\sin 135^\circ} = \frac{100}{\sin ACB}.$$

Откуда

$$\sin ACB = \frac{100 \sin 135^\circ}{131.4} = 0.5381.$$

Следовательно, $\angle ACB = \arcsin 0.5381 = 32°33'$ (или $147°27'$, что в данном случае невозможно). **Итак, результирующий вектор напряжения равен 131.4 В и составляет угол 32°33′ относительно V_1.**

Пример. На **Рис. 3.37** показан кривошипно-шатунный механизм бензинового двигателя. Плечо OA имеет длину 10.0 см и вращается по часовой стрелке вокруг O. Шатун AB имеет длину 30.0 см, и конец B движется горизонтально. Определить угол между шатуном AB и горизонталью и длину OB в положении, показанном на **Рис. 3.37**.

По теореме синусов, $\frac{AB}{\sin 50^\circ} = \frac{AO}{\sin B}$, откуда

$$\sin B = \frac{AO \sin 50^\circ}{AB} = \frac{10.0 \sin 50^\circ}{30.0} = 0.2553.$$

Значит, $B = \arcsin 0.2553 = 14°47'$ (или $165°13'$, что в данном случае невозможно).

Следовательно, шатун AB составляет угол 14°47′ с горизонталью.
$\angle OAB = 180° - 50° - 14°47' = 115°13'$.

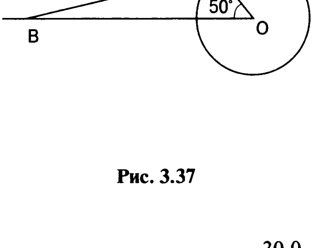


Рис. 3.37

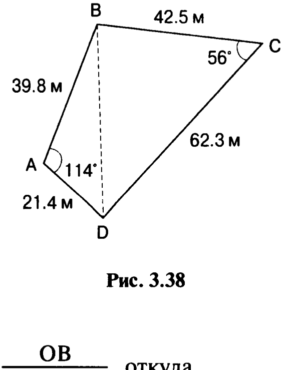


Рис. 3.38

По теореме синусов: $\frac{30.0}{\sin 50^\circ} = \frac{OB}{\sin 115^\circ 13'}$, откуда

$$OB = \frac{30.0 \sin 115°13'}{\sin 50°} = \mathbf{35.43\ см}.$$

Пример. Поле имеет форму четырехугольника ABCD, показанного на **Рис. 3.38**. Определить площадь поля.

Проведенная из B в D диагональ делит четырехугольник на два треугольника.

Площадь четырехугольника ABCD =

= площадь треугольника ABD + площадь треугольника BCD, т. е.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(39.8)(21.4)\sin 114° + \frac{1}{2}(42.5)(62.3)\sin 56° =$$

$$= 389.04 + 1097.5 = \mathbf{1487\ м^2}.$$

3.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

3.5.1. Графики тригонометрических функций

Графики функций $y = \sin A$, $y = \cos A$, $y = \operatorname{tg} A$, построенные по таблицам для диапазона от 0° до 360°, показаны на **Рис. 3.39**.

Из графиков видно, что:

- Графики синуса и косинуса колеблются в пределах между максимальными значениями ± 1.
- Кривая косинуса имеет ту же форму, что и кривая синуса, но сдвинута относительно нее на 90°.
- Кривые синуса и косинуса непрерывны и повторяются с периодом 360°, кривая тангенса имеет разрывы и повторяется с периодом 180°.

3.5.2. Углы произвольной величины

На **Рис. 3.40** показаны перпендикулярные оси XX' и YY', пересекающиеся в начале координат O. При работе с графиками измерения вправо и вверх от O считаются положительными, влево и вниз от O — отрицательными. Пусть OA свободно вращается относительно O. При повороте OA против часовой стрелки измеряемый угол считается положительным, а при повороте по часовой стрелке – отрицательным.

Пусть OA вращается против часовой стрелки таким образом, что θ_1 — любой угол в первом квадранте, и построим перпендикуляр AB для получения прямоугольного треугольника OAB на **Рис. 3.41**. Поскольку все три стороны треугольника положительны, тригонометрические функции синус, косинус и тангенс в первом квадранте будут положительны. (Отметим, что длина OA всегда положительна, поскольку является радиусом круга.)

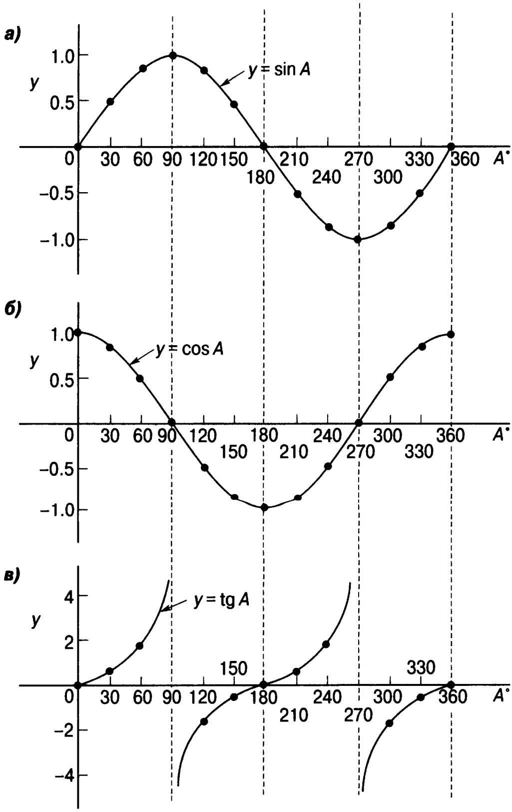


Рис. 3.39

Рис. 3.40

Пусть OA вращается дальше таким образом, что θ_2 — любой угол во втором квадранте, и построим AC так, чтобы образовался прямоугольный треугольник OAC. Тогда

$$\sin\theta_2 = \frac{+}{+} = +;\ \cos\theta_2 = \frac{+}{-} = -;\ \mathrm{tg}\theta_2 = \frac{+}{-} = -.$$

Пусть OA вращается дальше таким образом, что θ_3 — любой угол в третьем квадранте, и построим AD так, чтобы образовался прямоугольный треугольник OAD. Тогда

$$\sin\theta_3 = \frac{-}{+} = -;\ \cos\theta_3 = \frac{-}{+} = -;\ \mathrm{tg}\,\theta_3 = \frac{-}{-} = +.$$

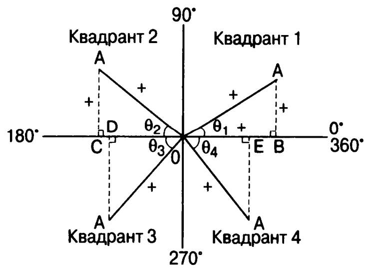


Рис. 3.41

Пусть OA вращается дальше таким образом, что θ_4 — любой угол в четвертом квадранте, и построим AE так, чтобы образовался прямоугольный треугольник OAE. Тогда

$$\sin\theta_4 = \frac{-}{+} = -;\ \cos\theta_4 = \frac{+}{+} = +;\ \mathrm{tg}\,\theta_4 = \frac{-}{+} = -.$$

Полученные результаты приведены на **Рис. 3.42**.

В первом квадранте на **Рис. 3.39** все тригонометрические функции имеют положительные значения, во втором положителен только синус, в третьем — только тангенс, в четвертом — только косинус, что и показано на **Рис. 3.42**.

Знание углов произвольной величины необходимо при нахождении, например, всех углов между 0° и 360°, синус которых равен, скажем, 0.3261. Если ввести в калькулятор 0.3261 и нажать кнопку $\sin^{-1}$, получим ответ 19.03°. Однако существует второй угол между 0° и 360°, который калькулятор не покажет. Синус также положителен во втором квадранте (согласно **Рис. 3.39а**). Другой угол показан на **Рис. 3.43** как угол θ, где $\theta = 180° - 19.03° = 160.97°$. Таким образом, 19.03° и 160.97° — это углы в диапазоне от 0° до 360°, синус которых равен 0.3261 (проверим на калькуляторе, что $\sin 160.97° = 0.3261$).

Рис. 3.42

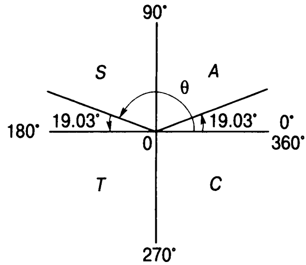


Рис. 3.43

Будьте внимательны! Калькулятор дает только одно из этих значений. Второе значение следует определить согласно теории углов произвольной величины.

Пример. Найти все углы в диапазоне от 0° до 360°, синус которых равен –0.4638.

Углы, синус которых равен –0.4638, находятся в третьем и четвертом квадрантах, поскольку синус отрицателен в этих квадрантах — см. **Рис. 3.44**.

Из **Рис. 3.45**, $\theta = \arcsin 0.4638 = 27.63°$. Два угла в диапазоне от 0° до 360°, синус которых равен –0.4638, — это 180° + 27.63°, т. е. **207.63°**, и 360° – 27.63°, т. е. **332.37°**.

Примечание. Калькулятор дает только один ответ, т. е. –27.632588°.

Пример. Найти все углы между 0° и 360°, тангенс которых равен 1.7629.

Тангенс положителен в первом и третьем квадрантах — **Рис. 3.46**. Из **Рис. 3.47**, $\theta = \mathrm{arctg}\ 1.7629 = 60.44°$.

Два угла в диапазоне от 0° до 360°, тангенс которых равен 1.7629, — это **60.44°** и 180° + 60.44°, т. е. **240.44°**.

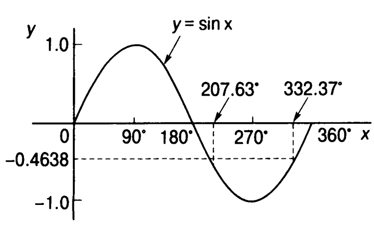


Рис. 3.44

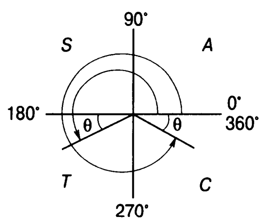


Рис. 3.45

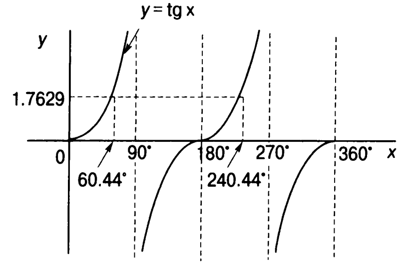


Рис. 3.46

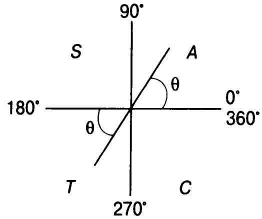


Рис. 3.47

3.5.3. Построение синусоиды и косинусоиды

Пусть OR на **Рис. 3.48** — это вектор единичной длины, свободно вращающийся против часовой стрелки вокруг O. За один оборот получается круг, показанный на рисунке и разделенный секторами по 15°. Каждый радиус имеет горизонтальную и вертикальную составляющую. Например, для 30° вертикальная составляющая — это TS, а горизонтальная — OS.

Из определения тригонометрических функций

$$\sin 30° = \frac{TS}{TO} = \frac{TS}{1}\text{, т. е. } TS = \sin 30°,$$

и

$$\cos 30° = \frac{OS}{TO} = \frac{OS}{1}\text{, т. е. } OS = \cos 30°.$$

Вертикальную составляющую TS можно перенести на график в виде T′S′, что равно значению, соответствующему углу 30° на графике зависимости y от угла x. Если все вертикальные составляющие, подобно TS, перенести на график, то получится *синусоида*, показанная на **Рис.3.48**.

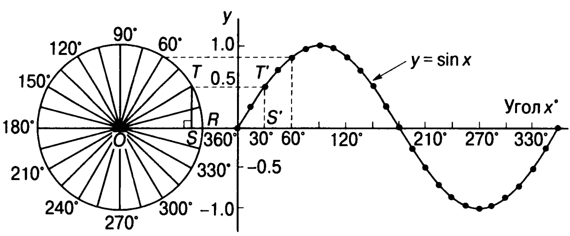


Рис. 3.48

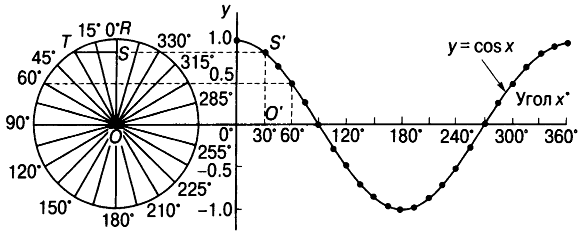


Рис. 3.49

Если все горизонтальные составляющие, подобные OS, спроецировать на график зависимости y от угла x, получится *косинусоида*. Эти проекции легко визуализировать, перерисовывая круг с радиусом OR и началом отсчета углов от вертикали, как показано на **Рис. 3.49**.

Из **Рис. 3.48** и **3.49** видно, что синусоида имеет ту же форму, что и косинусоида, но смещена на 90° (или $\pi/2$ радиан).

3.5.4. Синусоидальные и косинусоидальные графики

На **Рис. 3.50** показаны графики функций $y = \sin A$ и $y = \sin 2A$.

График $y = \sin\frac{1}{2}A$ показан на **Рис. 3.51**.

Графики $y = \cos A$ и $y = \cos 2A$ показаны на **Рис. 3.52**.

График $y = \cos\frac{1}{2}A$ показан на **Рис. 3.53**.

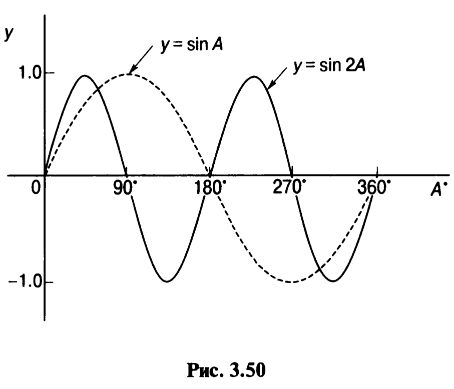


Рис. 3.50

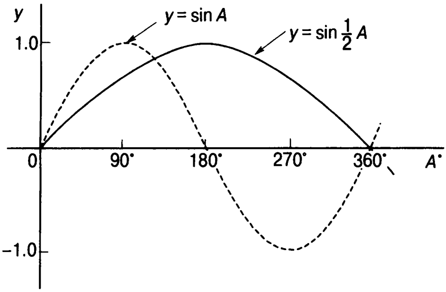


Рис. 3.51

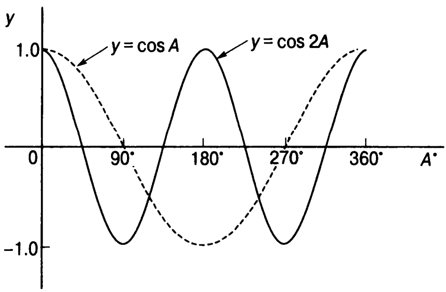


Рис. 3.52

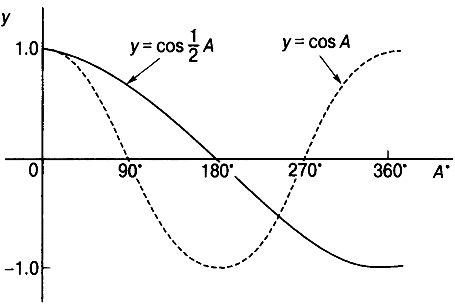


Рис. 3.53

3.5.5. Периодические функции и период

Каждый из графиков функций, показанных на **Рис. 3.50...3.53**, повторяется при увеличении угла A, поэтому их называют *периодическими функциями*.

Функции $y = \sin A$ и $y = \cos A$ повторяются через каждые 360° (или 2π радиан), поэтому 360° называется *периодом* этих функций. Функции $y = \sin 2A$ и $y = \cos 2A$ повторяются через каждые 180° (или π радиан), поэтому 180° — это период для данных функций.

В общем случае если $y = \sin pA$ и $y = \cos pA$ (где p — константа), то период функции равен $360°/p$ (или $2\pi/p$ радиан). Следовательно, если $y = \sin 3A$, то период этой функции равен $360°/3 = 120°$, если $y = \cos 4A$, то период этой функции равен $360°/4 = 90°$.

Амплитуда

Амплитудой называется максимальное значение синусоиды. Каждый из графиков, показанных на **Рис. 3.50...3.53**, имеет амплитуду +1 (т. е. они колеблются между +1 и −1). Однако, если $y = 4 \sin A$, каждая из величин $\sin A$ умножается на 4, таким образом, максимальная величина амплитуды — 4. Аналогично для $y = 5 \cos 2A$ амплитуда равна 5, а период — $360°/2 = 180°$.

Пример. Построить $y = 3 \sin 2A$ в диапазоне от $A = 0°$ до $A = 360°$.

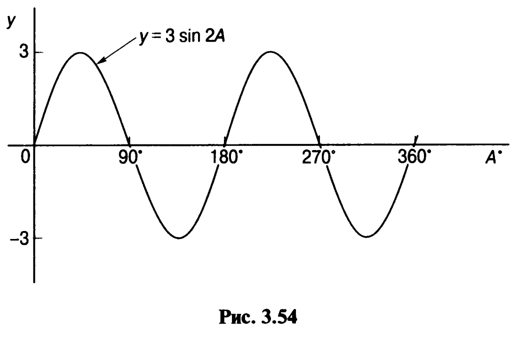


Рис. 3.54

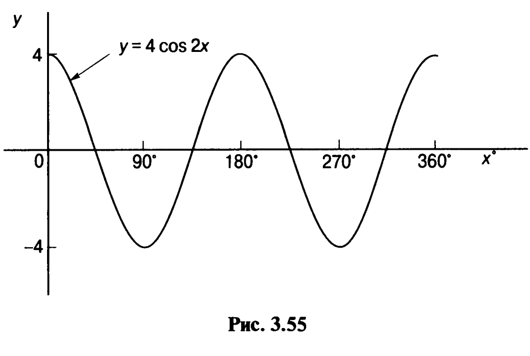


Рис. 3.55

Амплитуда = 3, период = 360°/2 = 180°.

Набросок графика $y = 3 \sin 2A$ показан на **Рис. 3.54**.

Пример. Построить график $y = 4 \cos 2x$ в диапазоне от $x = 0°$ до $x = 360°$.

Амплитуда = 4, период = 360°/2 = 180°.

Набросок графика $y = 4 \cos 2x$ показан на **Рис. 3.55**.

Углы запаздывания и опережения

Кривые синуса и косинуса не всегда начинаются в 0°. Чтобы учесть это обстоятельство, периодическая функция представляется в виде $y = \sin (A \pm \alpha)$ или $y = \cos (A \pm \alpha)$, где α — сдвиг фазы относительно $y = \sin A$ и $y = \cos A$.

Составив таблицу значений, можно построить график функции $y = \sin (A - 60°)$, показанный на **Рис. 3.56**. Если кривая $y = \sin A$ начинается в 0°, то кривая $y = \sin (A - 60°)$ начинается в 60° (т. е. ее нулевое значение на 60° правее). Таким образом, говорят, что $y = \sin (A - 60°)$ ***запаздывает*** относительно $y = \sin A$ на 60°.

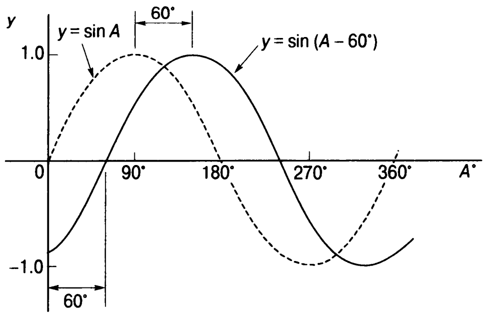


Рис. 3.56

Составив таблицу значений, можно построить график функции $y = \cos (A + 45°)$, показанный на **Рис. 3.57**. Если кривая $y = \cos A$ начинается в 0°, то кривая $y = \cos (A + 45°)$ начинается на 45° левее (т. е. ее нулевая величина находится на 45° раньше). Таким образом, говорят, что график $y = \cos (A + 45°)$ ***опережает*** график $y = \cos A$ на 45°.

В общем виде, график $y = \sin (A - \alpha)$ запаздывает относительно $y = \sin A$ на угол α, а график функции $y = \sin (A + \alpha)$ опережает $y = \sin A$ на угол α.

Косинусоида имеет ту же форму, что и синусоида, но начинается на 90° левее, т. е. опережает ее на 90°. Следовательно, $\cos A = \sin (A + 90°)$.

Пример. Построить график $y = 5 \sin (A + 30°)$ в диапазоне от $A = 0°$ до $A = 360°$.

Амплитуда = 5, период = 360°/1 = 360°.

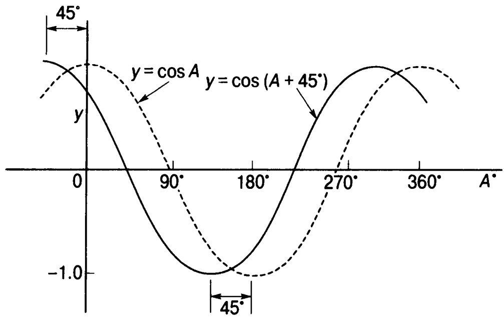


Рис. 3.57

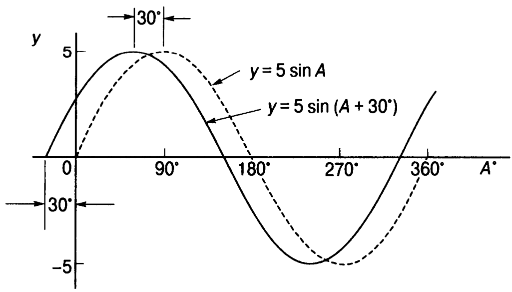


Рис. 3.58

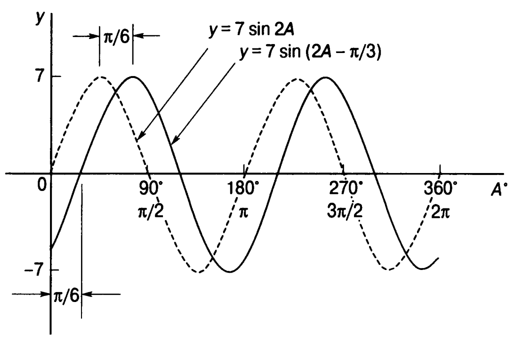


Рис. 3.59

$5 \sin(A + 30°)$ опережает $5 \sin A$ на $30°$ (т. е. начинается на $30°$ раньше).

График $y = 5 \sin(A + 30°)$ показан на **Рис. 3.58**.

Пример. Построить график $y = 7 \sin(2A - \pi/3)$ в диапазоне $0° \le A \le 360°$.

Амплитуда = 7, период = $2\pi/2 = \pi$ радиан.

В общем случае, **$y = \sin(pt - \alpha)$ запаздывает относительно $y = \sin pt$ на α/p**, следовательно, $7 \sin(2A - \pi/3)$ запаздывает относительно $7 \sin 2A$ на $(\pi/3)/2$, т. е. на $\pi/6$ радиан или на $30°$.

График $y = 7 \sin(2A - \pi/3)$ показан на **Рис. 3.59**.

3.5.6. Синусоида вида $A \sin(\omega t \pm \alpha)$

Пусть OR на **Рис. 3.60** представляет собой вектор, свободно вращающийся против часовой стрелки вокруг O со скоростью ω радиан/с. Вращающийся вектор называется *фазовым вектором*. Через время t секунд OR повернется на угол ωt радиан (на **Рис. 3.60** это угол TOR). Если перпендикулярно к OR построить ST, то $\sin \omega t = ST/OT$, т. е. $ST = OT \sin \omega t$.

Если все подобные вертикальные составляющие спроецировать на график зависимости y от ωt, получится синусоида с амплитудой OR (как было показано выше).

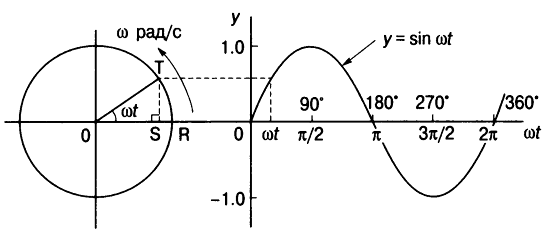


Рис. 3.60

Если фазовый вектор OR делает один оборот (т. е. 2π радиан) за T секунд, то угловая скорость $\omega = 2\pi/T$ рад/с, откуда

$$\boxed{T = 2\pi/\omega \text{ с}}$$

где T — это *период*.

Число полных периодов, проходящих за одну секунду, называется *частотой* f.

$$\text{Частота} = \frac{\text{количество периодов}}{\text{секунда}} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ \text{Гц},$$

т. е.

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}\ \text{Гц}}$$

Следовательно, угловая скорость

$$\boxed{\omega = 2\pi f\ \text{рад/с}}$$

Если в общем виде синусоидальная функция выглядит как $y = A\sin(\omega t \pm \alpha)$, то

- A — амплитуда,
- ω — угловая скорость;
- $\frac{2\pi}{\omega}$ — период T, с;
- $\frac{\omega}{2\pi}$ — частота f, Гц;
- α — угол опережения или запаздывания (относительно $y = A\sin\omega t$) в радианах; он называется также фазовым углом.

Пример. Переменный ток задается как $i = 30\sin(100\pi t + 0.27)$ ампер. Определить амплитуду, период, частоту и фазовый угол (в градусах и минутах).

$i = 30\sin(100\pi t + 0.27)$ А, следовательно, **амплитуда равна 30 А.**

Угловая скорость $\omega = 100\pi$, следовательно,

период $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} = \mathbf{0.02\ с = 20\ мс}$,

частота $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.02} = \mathbf{50\ Гц}$,

фазовый угол $\alpha = 0.27\,\text{рад} = \left(0.27 \times \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \mathbf{15.47^{\circ}}$ или $\mathbf{15^{\circ}28'}$

с опережением относительно $\boldsymbol{i = 30\sin(100\pi t)}$.

Пример. Колебательный механизм имеет максимальное смещение 2.5 м и частоту 60 Гц. Во время $t = 0$ смещение составляет 90 см. Выразить смещение в общем виде $A\sin(\omega t \pm \alpha)$.

Амплитуда = максимальное смещение = 2.5 м.

Угловая скорость $\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 120\pi$ рад/с.

Следовательно, смещение $= 2.5\sin(120\pi t + \alpha)$ м.

При $t = 0$ смещение = 90 см = 0.90 м.

Следовательно, $0.90 = 2.5 \sin(0 + \alpha)$, т. е. $\sin\alpha = \dfrac{0.90}{2.5} = 0.36$.

Следовательно, $\alpha = \arcsin 0.36 = 21.10° = 21°6' = 0.368$ рад.

Итак, **смещение равно $2.5 \sin(120\pi t + 0.368)$ м**.

Пример. Значение мгновенного напряжения в схеме переменного тока в любые t секунд задается в виде $v = 340 \sin(50\pi t - 0.541)$ В. Найти:

а) амплитуду, период, частоту и фазовый угол (в градусах),

б) значение напряжения при $t = 0$,

в) значение напряжения при $t = 10$ мс,

г) время, за которое напряжение впервые достигнет значения 200 В.

а) Амплитуда = 340 В, угловая скорость $\omega = 50\pi$.

Следовательно,

период $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{50\pi} = \dfrac{1}{25} =$ **0.04 с = 40 мс**.

Частота $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.04} =$ **25 Гц**.

Фазовый угол $= 0.541$ рад $\left(0.541 \times \dfrac{180}{\pi}\right) =$

= **31° с запаздыванием относительно** $v = 340 \sin(50\pi t)$.

б) **Если $t = 0$**, то $v = 340 \sin(0 - 0.541) = 340 \sin(-31°) =$ **−175.1 В**.

в) **Если $t = 10$ мс**, то $v = 340 \sin\left(50\pi \dfrac{10}{10^3} - 0.541\right) =$

$$= 340 \sin(1.0298) = 340 \sin 59° = \mathbf{291.4\ В}.$$

г) Если $v = 200$ В, то $200 = 340 \sin(50\pi t - 0.541)$,

$$\frac{200}{340} = \sin(50\pi t - 0.541).$$

Следовательно, $(50\pi t + 0.541) = \arcsin \dfrac{200}{340} =$

$$= 36.03° \text{ или } 0.6288 \text{ рад.}$$

$$50\pi t = 0.6288 + 0.541 = 1.1698.$$

Следовательно, если $v = 200$ В, то **время** $t = \dfrac{1.1698}{50\pi} =$ **7.447 мс**.

График $v = 340 \sin(50\pi t - 0.541)$ вольт показан на **Рис. 3.61**.

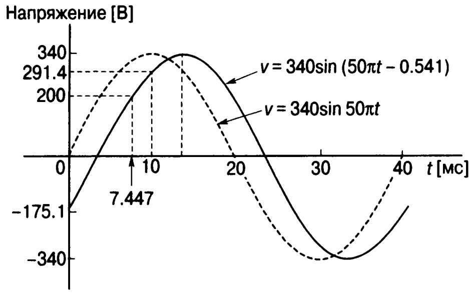


Рис. 3.61

3.6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА И УРАВНЕНИЯ

3.6.1. Тригонометрические тождества

Тригонометрическое тождество — это соотношение, верное при любых значениях неизвестных переменных.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ и } \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

это примеры тригонометрических тождеств из разд. 3.2.

Применяя теорему Пифагора к треугольнику на **Рис. 3.62**, получаем

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Делим каждый член уравнения (1) на c^2:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2},$$

т. е.

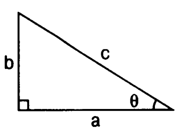


Рис. 3.62

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1;\ (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1.$$

Следовательно,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{2}$$

Делим каждый член уравнения (1) на a^2:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2},\ \text{т. е. } 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

Делим каждый член уравнения (1) на b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

Уравнения (2), (3), (4) — это тоже примеры тригонометрических тождеств.

Пример. Доказать тождество $\sin^2\theta \operatorname{ctg}\theta \sec\theta = \sin\theta$.

При работе с тригонометрическими тождествами необходимо начать с левой части тождества и попытаться сделать его равным правой части или наоборот. Часто полезно по возможности заменить все тригонометрические функции синусами и косинусами.

Итак:

левая часть тождества $= \sin^2\theta \operatorname{ctg}\theta \sec\theta = \sin^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) =$

$= \sin\theta$ (после сокращения) $=$ правая часть тождества.

Пример. Доказать, что $\frac{1+\operatorname{ctg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{ctg}\theta$.

Левая часть тождества $= \dfrac{1+\operatorname{ctg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}} =$

$$= \left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right) =$$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{ctg}\theta =$ правая часть тождества.

3.6.2. Тригонометрические уравнения

Уравнения, содержащие тригонометрические функции, называются *тригонометрическими уравнениями.* Как правило, существует бесконечное множество решений подобных уравнений, однако решения часто ограничивают диапазоном от 0° до 360°.

При решении тригонометрических уравнений важно знание теории углов произвольной величины, и здесь нельзя ожидать, что калькулятор даст все решения (что доказано в разд. 3.5). На **Рис. 3.63** кратко показаны свойства углов любой величины.

Уравнения вида $a \sin^2 A + b \sin A + c = 0$.

Если $a = 0$, то $b \sin A + c = 0$; следовательно,

$$\sin A = -\frac{c}{b} \text{ и } A = \arcsin\left(-\frac{c}{b}\right).$$

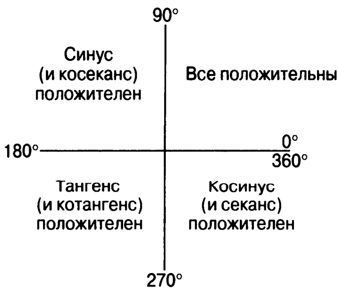


Рис. 3.63

Существует два значения A между 0° и 360°, удовлетворяющих данному уравнению при условии, что $-1 \le \frac{c}{b} \le 1$.

Если $b = 0$, то $a \sin^2 A + c = 0$; следовательно,

$$\sin^2 A = -\frac{c}{a}, \ \sin A = \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)} \text{ и } A = \arcsin\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}.$$

Если a или c отрицательное, то величина под корнем положительна. Поскольку квадратный корень имеет два значения, положительное и отрицательное, то существует четыре значения A между 0° и 360°, удовлетворяющих этому уравнению при условии, что $-1 \le \frac{c}{a} \le 1$.

Если a, b и c все не равны нулю, то:

- $a \sin^2 A + b \sin A + c = 0$ — квадратное уравнение, в котором неизвестная величина — это $\sin A$. Решение квадратного уравнения получают разложением на множители (если это возможно) или используя формулу корней квадратного уравнения:

$$\sin A = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

- Для приведения уравнений к одной из рассмотренных выше форм часто приходится использовать тригонометрические тождества $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, $1 + \text{tg}^2 A = \sec^2 A$ и $\text{ctg}^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$.

Пример. Решить уравнение $5 \sin \theta + 3 = 0$ для значений θ в пределах от 0° до 360°.

Так как $5 \sin \theta + 3 = 0$, то $\sin \theta = -3/5 = -0.6000$.

Следовательно, $\theta = \arcsin(-0.6000)$. Синус отрицателен в третьем и четвертом квадрантах (**Рис. 3.64**). Острый угол $\arcsin(-0.6000) = 36.87°$ (это угол α на **Рис. 3.64б**.

Следовательно, $\theta = 180° + 36.87°$, т. е. **216.87°**, или $\theta = 360° - 36.87°$, т. е. **323.13°**.

Пример. Решить уравнение $4 \sec t = 5$ для значений t между 0° и 360°.

Так как $4 \sec t = 5$, то $\sec t = \frac{5}{4} = 1.2500$.

Следовательно, $t = \text{arcsec}\, 1.2500$.

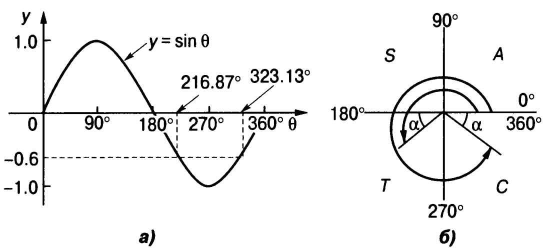


Рис. 3.64

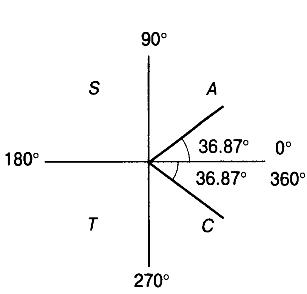


Рис. 3.65

Секанс $= \dfrac{1}{\cos}$ положителен в первом и четвертом квадрантах (**Рис. 3.65**).

Острый угол arcsec 1.2500 = 36.87°. Следовательно, t **= 36.87°** или 360° – 36.87° = **323.13°**.

Пример. Решить уравнение $2 - 4\cos^2 A = 0$ в диапазоне $0° < A < 360°$.

Поскольку $2 - 4\cos^2 A = 0$, то $\cos^2 A = \dfrac{2}{4} = 0.5000$.

Следовательно,

$$\cos A = \sqrt{0.5000} = \pm 0.7071;\ A = \arccos(\pm 0.7071).$$

Косинус положителен в первом и четвертом квадрантах и отрицателен во втором и третьем. Таким образом, в данном случае существует четыре решения, по одному для каждого квадранта (**Рис. 3.66**).

Острый угол arccos 0.7071 = 45°.

Следовательно, **A = 45°, 135°, 225° или 315°**.

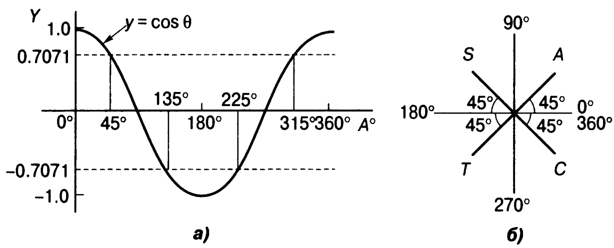


Рис. 3.66

Пример. Решить уравнение $8\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ для всех значений θ между 0° и 360°.

Разложим $8\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ на множители: $(4\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1) = 0$.

Значит, или $4\sin\theta - 1 = 0$, откуда $\sin\theta = \dfrac{1}{4} = 0.2500$, или

$$2\sin\theta + 1 = 0,\ \text{откуда}\ \sin\theta = -\frac{1}{2} = -0.5000.$$

(Вместо разложения на множители, конечно, можно использовать формулу корней квадратного уравнения.)

$\theta = \arcsin 0.250 = 14.48°$ или 165.52°, поскольку синус положителен в первом и втором квадрантах, или

$\theta = \arcsin(-0.5000) = 210^\circ$ или 330°, поскольку синус отрицателен в третьем и четвертом квадрантах.

Следовательно, θ **= 14.48°, 165.52°, 210° или 330°**.

Пример. Решить уравнение $18\sec^2 A - 3\,\text{tg}\,A = 21$ для значений A между 0° и 360°.

$1 + \text{tg}^2 A = \sec^2 A$. Подставляем это тождество вместо $\sec^2 A$ в $18\sec^2 A - 3\,\text{tg}\,A = 21$:

$$18(1 + \text{tg}^2 A) - 3\,\text{tg}\,A = 21,$$
$$18 + 18\,\text{tg}^2 A - 3\text{tg}A - 21 = 0,$$
$$18\,\text{tg}^2 A - 3\,\text{tg}\,A - 3 = 0.$$

Разложим на множители: $(6\,\text{tg}\,A - 3)(3\,\text{tg}\,A + 1) = 0$.

Значит, или $6\,\text{tg}\,A - 3 = 0$, откуда $\text{tg}\,A = \frac{3}{6} = 0.5000$, или $3\,\text{tg}\,A + 1 = 0$, откуда $\text{tg}A = -\frac{1}{3} = -0.3333$. Таким образом,
$A = \text{arctg}\,(0.5000) = 26.57^\circ$ или 206.57°, поскольку тангенс положителен в первом и третьем квадрантах, или
$A = \text{arctg}\,(-0.3333) = 161.57^\circ$ или 341.57°, поскольку тангенс отрицателен во втором и четвертом квадрантах.

Итак, A **= 26.57°, 161.57°, 206.57° или 341.57°**.

3.7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В подразд. 6.2.4 показано, что

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \qquad (1)$$

и

$$\cos\theta - j\sin\theta = e^{-j\theta}. \qquad (2)$$

Складываем уравнения (1) и (2):

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}). \qquad (3)$$

Вычитаем уравнение (2) из уравнения (1):

$$\sin\theta = \frac{1}{j\theta}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}). \qquad (4)$$

Подстановка $j\theta$ вместо θ в уравнения (3) и (4) дает

$$\cos j\theta = \frac{1}{2}(e^{j(j\theta)} + e^{-j(j\theta)})$$

и

$$\sin j\theta = \frac{1}{2j}(e^{j(j\theta)} - e^{-j(j\theta)}).$$

Так как $j^2 = -1$, $\cos j\theta = \frac{1}{2}(e^{-\theta}+e^{\theta}) = -\frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta})$.

Из разд. 1.3 следует, что

$$\cos j\theta = \text{ch}\,\theta. \tag{5}$$

Аналогично $\sin j\theta = \frac{1}{2j}(e^{-\theta}-e^{\theta}) = -\frac{1}{2j}(e^{\theta}-e^{-\theta}) =$

$$= \frac{-1}{j}\left[\frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta})\right] = -\frac{1}{j}\text{sh}\theta \quad \text{(см. разд. 1.3).}$$

Но $-\frac{1}{j} = -\frac{1}{j}\times\frac{j}{j} = -\frac{j}{j^2} = j$.

Следовательно,

$$\sin j\theta = j\text{sh}(\theta). \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) можно использовать, чтобы убедиться, что во всех стандартных тригонометрических тождествах θ можно заменить на $j\theta$ и при этом тождество останется верным.

Пример. Проверить, что $\cos^2 j\theta + \sin^2 j\theta = 1$.

Из уравнения (5): $\cos j\theta = \text{ch}\,\theta$, а из уравнения (6): $\sin j\theta = j\,\text{sh}\,\theta$.

Таким образом, $\cos^2 j\theta + \sin^2 j\theta = \text{ch}^2\theta + j^2\text{sh}^2\theta$, и поскольку $j^2 = -1$, то

$$\cos^2 j\theta + \sin^2 j\theta = \text{ch}^2\theta - \text{sh}^2\theta.$$

Но $\text{ch}^2\theta - \text{sh}^2\theta = 1$, согласно разд. 1.13; следовательно,

$$\mathbf{\cos^2 j\theta + \sin^2 j\theta = 1}.$$

Пример. Проверить, что $\sin j2A = 2\sin jA\cos jA$.

Из уравнения (6), подставляя $2A$ вместо θ, получаем: $\sin j2A = j\text{sh}\,2A$, и согласно **Табл. 1.2** со стр. 80 разд. 1.13, $\text{sh}\,2A = 2\,\text{sh}A\,\text{ch}\,A$.

Следовательно, $\sin j2A = j(2\,\text{sh}\,A\,\text{ch}\,A)$.

Но $\text{sh}\,A = \frac{1}{2}(e^{A}-e^{-A})$ и $\text{ch}\,A = \frac{1}{2}(e^{A}+e^{-A})$.

Следовательно, $\sin j2A = j2\left(\frac{e^{A}-e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^{A}+e^{-A}}{2}\right) =$

$$= -\frac{2}{j}\left(\frac{e^{A}-e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^{A}+e^{-A}}{2}\right) = -\frac{2}{j}\left(\frac{\sin j\theta}{j}\right)(\cos j\theta) =$$

$$= 2\sin jA \cos jA, \text{ поскольку } j^2 = -1;$$

т. е.

$$\sin j2A = 2\sin jA\cos jA .$$

3.7.1. Гиперболические тождества

В разд. 1.13 была определена функция $\text{ch}\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$.

Подставляем $j\theta$ вместо θ:

$$\text{ch}\, j\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \cos\theta \text{ (из уравнения (3)).}$$

То есть

$$\text{ch} j\theta = \cos\theta . \tag{7}$$

Аналогично $\text{sh}\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})$.

Подставляем $j\theta$ вместо θ:

$$\text{sh}\, j\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = j\sin\theta \text{ (из уравнения (4)).}$$

Следовательно,

$$\text{sh}\, j\theta = j\sin\theta , \tag{8}$$

$$\text{tg}\, j\theta = \frac{\sin j\theta}{\cos j\theta} .$$

Из уравнений (5) и (6): $\frac{\sin j\theta}{\cos j\theta} = \frac{j\,\text{sh}\, j\theta}{\text{ch}\, j\theta} = j\,\text{th}\theta$.

Следовательно,

$$\text{tg}\, j\theta = j\,\text{th}\theta . \tag{9}$$

Аналогично $\text{th}\, j\theta = \frac{\text{sh}\, j\theta}{\text{ch}\, j\theta}$.

Из уравнений (7) и (8): $\frac{\text{sh}\, j\theta}{\text{ch}\, j\theta} = \frac{j\sin\theta}{\cos\theta} = j\,\text{tg}\theta$.

Следовательно,

$$\text{th}\, j\theta = j\,\text{tg}\theta . \tag{10}$$

Для доказательства гиперболических тождеств, как правило, используются два метода. Это: а) подстановка $j\theta$ ($j\phi$) в соответствующее тригонометрическое тождество с последующим использованием уравнений (5)...(10) и б) применение *правила Осборна*, рассмотренного в разд. 1.13.

Пример. Подставить jA вместо θ в $\mathrm{ctg}^2\,\theta + 1 = \mathrm{cosec}^2\theta$ и определить соответствующее тождество.

$$\mathrm{ctg}\,jA + 1 = \mathrm{cosec}^2 jA, \text{ т. е. } \frac{\cos^2 jA}{\sin^2 jA} + 1 = \frac{1}{\sin^2 jA}.$$

Но, согласно уравнению (5), $\cos jA = \mathrm{ch}\,A$,
и, согласно уравнению (6), $\sin jA = j\,\mathrm{sh}\,A$.

Следовательно, $\dfrac{\mathrm{ch}^2 A}{j^2\mathrm{sh}^2 A} + 1 = \dfrac{1}{j^2\mathrm{sh}^2 A}$, и поскольку $j^2 = -1$, то

$$-\frac{\mathrm{ch}^2 A}{\mathrm{sh}^2 A} + 1 = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 A}.$$

Умножаем на -1:

$$\frac{\mathrm{ch}^2 A}{\mathrm{sh}^2 A} - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 A}, \text{ т. е. } \mathbf{cth^2}\boldsymbol{A} - \mathbf{1} = \mathbf{cosech}^2\boldsymbol{A}.$$

Пример. Показать, что $\mathrm{ch}\,A - \mathrm{ch}\,B = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{A-B}{2}\right)$,

подставив jA и jB соответственно вместо θ и ϕ в тригонометрическое тождество для $\cos\theta - \cos\phi$.

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \text{ (из разд. 3.8).}$$

Таким образом, $\cos jA - \cos jB = -2\sin j\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin j\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Но из уравнения (5) $\cos jA = \mathrm{ch}\,A$ и из уравнения (6) $\sin jA = j\,\mathrm{sh}\,A$.

Следовательно, $\mathrm{ch}A - \mathrm{ch}B = -2j\,\mathrm{sh}\left(\frac{A+B}{2}\right) j\mathrm{sh}\left(\frac{A-B}{2}\right) =$

$$= -2j^2\,\mathrm{sh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Но $j^2 = -1$, следовательно,

$$\mathbf{ch}\boldsymbol{A} - \mathbf{ch}\boldsymbol{B} = \mathbf{2\,sh}\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{sh}\left(\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}\right).$$

3.8. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

3.8.1. Формулы сложения углов

Электрический ток i может быть выражен в виде $i = 5\sin(\omega t - 0.33)$ ампер. Аналогичным образом можно выразить смещение тела x относительно фиксированной точки в виде $x = 10\sin(2t + 0.67)$ м. Углы $(\omega t - 0.33)$ и $(2t + 0.67)$ называются *составными*, поскольку представляют собой сумму или разность двух углов. Существуют тригонометрические тождества, называемые *формулами сложения*, которые описывают значения тригонометрических функций от суммы или разности углов A и B:

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B;$$
$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B;$$
$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B;$$
$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B;$$
$$\mathrm{tg}(A + B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B};$$
$$\mathrm{tg}(A - B) = \frac{\mathrm{tg}A - \mathrm{tg}B}{1 + \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B}.$$

(Отметим, что $\sin(A + B)$ не равняется $(\sin A + \sin B)$, и так далее.)

Формулы сложения углов верны для всех значений A и B, что можно показать, подставляя значения A и B в эти формулы.

Пример. Раскрыть скобки и упростить следующие выражения: а) $\sin(\pi + \alpha)$, б) $-\cos(90° + \beta)$, в) $\sin(A - B) - \sin(A + B)$.

а) $\sin(\pi + \alpha) = \sin\pi\cos\alpha + \cos\pi\sin\alpha = (0)(\cos\alpha) + (-1)(\sin\alpha) =$
$= \mathbf{-\sin\alpha}$.

б) $-\cos(90° + \beta) = -[\cos 90°\cos\beta - \sin 90°\sin\beta] =$
$= [(0)(\cos\beta) - (1)(\sin\beta)] = \mathbf{\sin\beta}$.

в) $\sin(A - B) - \sin(A + B) =$
$= [\sin A\cos B - \cos A\sin B] - [\sin A\cos B + \cos A\sin B] =$
$= \mathbf{-2\cos A\sin B}$.

Пример. Доказать, что $\cos(y - \pi) + \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\cos(y - \pi) = \cos y\cos\pi + \sin y\sin\pi =$$
$$= (\cos y)(-1) + (\sin y)(0) = -\cos y;$$

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y\cos\frac{\pi}{2} + \cos y\sin\frac{\pi}{2} =$$
$$= (\sin y)(0) + (\cos y)(1) = \cos y.$$

Следовательно, $\cos(y-\pi)+\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = (-\cos y)+(\cos y) = \mathbf{0}$.

Пример. Решить уравнение $4\sin(x-20°) = 5\cos x$ для значений x в пределах от 0° до 90°.

Произведем вычисления по формуле для $\sin(A-B)$:

$$\begin{aligned}4\sin(x-20°) &= 4[\sin x\cos 20° - \cos x\sin 20°] =\\ &= 4[(\sin x)(0.9397)-(\cos x)(0.3420)] =\\ &= 3.7588\sin x - 1.3680\cos x.\end{aligned}$$

Так как $4\sin(x-20°) = 5\cos x$, то $3.7588\sin x - 1.3680\cos x = 5\cos x$.

Преобразуя это уравнение, получаем

$$3.7588\sin x = 5\cos x + 1.3680\cos x = 6.3680\cos x$$

и

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{6.3680}{3.7588} = 1.6942\,.$$

То есть $\operatorname{tg} x = 1.6942$, а $x = \operatorname{arctg} 1.6942 =$ **59.499°, или 59°27′**.

Проверка. Левая часть: $4\sin(59.499°-20°) = 4\sin 39.499° = 2.542$; правая часть: $5\cos x = 5\cos 59.499° = 2.542$.

3.8.2. Преобразование *a* sin ω*t* + *b* cos ω*t* к виду *R* sin(ω*t* + α)

- $R\sin(\omega t+\alpha)$ представляет синусоиду с максимальным значением R, периодом $2\pi/\omega$, частотой $\omega/2\pi$ и опережением относительно $R\sin\omega t$ на угол α (разд. 3.5).
- $R\sin(\omega t+\alpha)$ можно преобразовать, используя формулу сложения углов для $\sin(A+B)$, где $A=\omega t$, $B=\alpha$.
  Тогда

$$\begin{aligned}R\sin(\omega t+\alpha) &= R[\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha] =\\ &= R\sin\omega t\cos\alpha + R\cos\omega t\sin\alpha =\\ &= (R\cos\alpha)\sin\omega t + (R\sin\alpha)\cos\omega t.\end{aligned}$$

- Если $a = R\cos\alpha$ и $b = R\sin\alpha$, где a и b — константы, то значения $R\sin(\omega t+\alpha) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$, т. е. при сложении функций синуса и косинуса с одной частотой получается синусоидальная функция с той же частотой (что далее будет продемонстрировано в разд. 5.2).
- Поскольку $a = R\cos\alpha$, то $\cos\alpha = a/R$, и так как $b = R\sin\alpha$, то $\sin\alpha = b/R$.

Если значения a и b известны, то можно вычислить величины R и α. Отношение между постоянными a, b, R и α показаны на **Рис. 3.67**.

Из **Рис. 3.67** по теореме Пифагора $\boldsymbol{R = \sqrt{a^2+b^2}}$, и из определений тригонометрических функций $\boldsymbol{\alpha = \operatorname{arctg}(b/a)}$.

Пример. Выразить $3\sin\omega t + 4\cos\omega t$ в виде $R\sin(\omega t + \alpha)$ и построить графики $3\sin\omega t$, $4\cos\omega t$ и $R\sin(\omega t + \alpha)$ в одних осях.

Пусть $3\sin\omega t + 4\cos\omega t = R\sin(\omega t + \alpha)$. Тогда

$$3\sin\omega t + 4\cos\omega t = R[\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha] =$$
$$= (R\cos\alpha)\sin\omega t + (R\sin\alpha)\cos\omega t.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin\omega t$:

$$3 = R\cos\alpha,\text{ откуда } \cos\alpha = \frac{3}{R}.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos\omega t$:

$$4 = R\sin\alpha,\text{ откуда } \sin\alpha = \frac{4}{R}.$$

Есть только один квадрант, в котором $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ положительны одновременно: это первый квадрант, как показано на **Рис.3.68**. Из **Рис. 3.68** по теореме Пифагора имеем

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Из определений тригонометрических функций получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 53.13° = 0.927\text{ радиан}.$$

Следовательно, $3\sin\omega t + 4\cos\omega t = 5\sin(\omega t + 0.927)$.

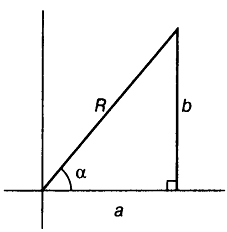


Рис. 3.67

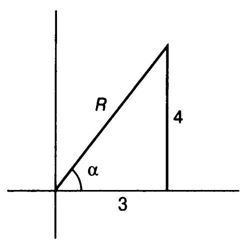


Рис. 3.68

Графики функций $3\sin\omega t$, $4\cos\omega t$ и $5\cos(\omega t + 0.927)$ показаны на **Рис.3.69**.

Две периодические функции с одной частотой можно скомбинировать: графическим построением функций с последующим сложением ординат в интервалах либо построением фазовых векторов графическим методом или с помощью калькулятора.

Пример. Выразить $4.6\sin\omega t - 7.3\cos\omega t$ в виде $R\sin(\omega t + \alpha)$.

Пусть $4.6 \sin \omega t - 7.3 \cos \omega t = R \sin(\omega t + \alpha)$. Тогда

$$4.6 \sin \omega t - 7.3 \cos \omega t = R[\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha] =$$
$$= (R \cos \alpha) \sin \omega t + (R \sin \alpha) \cos \omega t.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin \omega t$:

$$4.6 = R\cos\alpha, \text{откуда } \cos\alpha = \frac{4.6}{R}.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos \omega t$:

$$-7.3 = R\sin\alpha, \text{откуда } \sin\alpha = \frac{-7.3}{R}.$$

Существует единственный квадрант, где косинус положителен, а синус отрицателен: это четвертый квадрант, как показано на **Рис. 3.70**. По теореме Пифагора имеем

$$R = \sqrt{4.6^2 + (-7.3)^2} = 8.628\,.$$

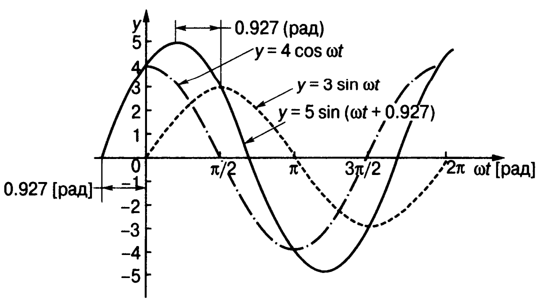


Рис. 3.69

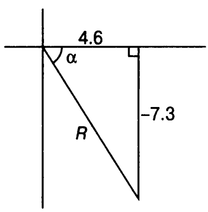


Рис. 3.70

Из определений тригонометрических функций:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-7.3}{4.6}\right) = -57.78° = -1.008 \text{ радиан.}$$

Следовательно, **$4.6 \sin \omega t - 7.3 \cos \omega t = 8.628 \sin(\omega t - 1.008)$**.

3.8.3. Двойные углы

Если в формуле сложения $\sin(A + B)$ положить $B = A$, то $\mathbf{\sin 2A = 2 \sin A \cos A}$.

Например, $\sin 4A = 2 \sin 2A \cos 2A$ и $\sin 8A = 2 \sin 4A \cos 4A$ и т. д.

Если в формуле сложения $\cos(A + B)$ положить $B = A$, то $\mathbf{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A}$.

Поскольку $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, то $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, и $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Отсюда можно вывести две дополнительные формулы для $\cos 2A$:

1. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$. Следовательно,
$$\mathbf{\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A}.$$
2. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$. Итак,
$$\mathbf{\cos 2A = 2\cos^2 A - 1}.$$

Также, например,

$\cos 4A = \cos^2 2A - \sin^2 2A$, $\quad \cos 6A = \cos^2 3A - \sin^2 3A$,

$\cos 4A = 1 - \sin^2 2A$, $\quad \cos 6A = 1 - \sin^2 3A$,

$\cos 4A = 2 \cos^2 2A - 1$, $\quad \cos 6A = 2 \cos^2 3A - 1$

и т. д.

Если в формуле сложения $\mathrm{tg}\,(A + B)$ положить $B = A$, то

$$\mathbf{tg} 2A = \frac{2\, \mathbf{tg} A}{1 - \mathbf{tg}^2 A}.$$

Также, например, $\mathrm{tg}\, 4A = \dfrac{2\, \mathrm{tg}(2A)}{1 - \mathrm{tg}^2 2A}$ и $\mathrm{tg}\, 5A = \dfrac{2\, \mathrm{tg}\left(\frac{5}{2}A\right)}{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{5}{2}A}$ и т. д.

Например, $I_3 \sin 3\theta$ — это третья гармоника сигнала. Выразим третью гармонику через первую гармонику $\sin\theta$, где $I_3 = 1$.

Если $I_3 = 1$, $I_3 \sin 3\theta = \sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta) =$
$$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta =$$
(согласно формуле двойного угла)
$$= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta =$$
$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta =$$
(поскольку $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$)
$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta =$$
$$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta.$$
Итак,
$$\mathbf{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta}.$$

Пример. Доказать, что $\mathrm{ctg}\, 2x + \mathrm{cosec}\, 2x = \mathrm{ctg}\, x$.

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{cosec} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x + 1}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{(2\cos^2 x - 1) + 1}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x .$$

3.8.4. Замена произведения синусов и косинусов на сумму или разность

$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$, т. е.

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]; \qquad (1)$$

$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$, т. е.

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) - \sin(A - B)]; \qquad (2)$$

$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$, т. е.

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]; \qquad (3)$$

$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$, т. е.

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)]. \qquad (4)$$

Пример. Выразить $\sin 4x \cos 3x$ в виде суммы или разности синусов и косинусов.

Из уравнения (1):

$$\sin 4x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin(4x + 3x) + \sin(4x - 3x)] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x).$$

Пример. Выразить $2 \cos 5\theta \sin \theta$ в виде суммы или разности синусов и косинусов.

Из уравнения (2):

$$2\cos 5\theta \sin 2\theta = 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(5\theta + 2\theta) - \sin(5\theta - 2\theta)]\right\} =$$

$$= \sin 7\theta - \sin 3\theta .$$

3.8.5. Замена суммы или разности синусов и косинусов на произведение

Пусть в формуле сложения углов $(A + B) = X$ и $(A - B) = Y$. Решение системы уравнений дает

$$A = \frac{X+Y}{2} \text{ и } B = \frac{X-Y}{2}.$$

Таким образом, формула $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A\cos B$ приобретает вид

$$\sin X + \sin Y = 2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right). \quad (5)$$

Аналогично

$$\sin X - \sin Y = 2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right), \quad (6)$$

$$\cos X + \cos Y = 2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right), \quad (7)$$

$$\cos X - \cos Y = -2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right). \quad (8)$$

Пример. Выразить $\sin 5\theta + \sin 3\theta$ в виде произведения.
Из уравнения (5):

$$\sin 5\theta + \sin 3\theta = 2\sin\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) = \mathbf{2\sin 4\theta\cos\theta}.$$

Пример. Выразить $\sin 7x - \sin x$ в виде произведения.
Из уравнения (6):

$$\sin 7x - \sin x = 2\cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{7x-x}{2}\right) = \mathbf{2\cos 4x\sin 3x}.$$

Глава 4

Графики

4.1. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ГРАФИКИ

4.1.1. Введение в теорию графиков

График — это визуальное представление информации, показывающее зависимость одной величины от другой, связанной с ней величины.

Наиболее распространенный способ демонстрации зависимости между двумя наборами данных — это использование *декартовых* или *прямоугольных осей*, как показано на **Рис. 4.1**.

Точки на графике называются *координатами*. Точка A на **Рис. 4.1** имеет координаты (3, 2), т. е. 3 единицы в направлении x и 2 единицы в направлении y. Аналогично точка B имеет координаты (– 4, 3), а C — координаты (– 3, – 2). Начало координат — это точка (0, 0).

Расстояние по горизонтали от точки до вертикальной оси называется *абсциссой,* а расстояние по вертикали от точки до горизонтальной оси называется *ординатой*.

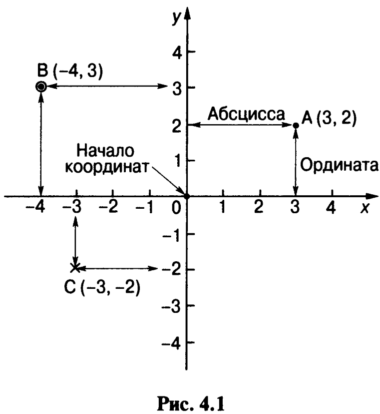


Рис. 4.1

4.1.2. Прямолинейный график

Пусть две переменные x и y связывает зависимость $y = 3x + 2$.

При $x = 0$, $y = 3(0) + 2 = 2$. При $x = 1$, $y = 3(1) + 2 = 5$.
При $x = 2$, $y = 3(2) + 2 = 8$, и т. д.

Таким образом, из уравнения получены координаты (0, 2), (1, 5) и (2, 8) при произвольном выборе значений x, и они показаны на **Рис. 4.2**. Если эти точки соединить, получится *прямая линия*.

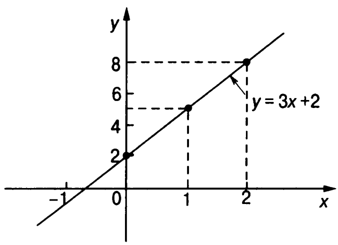


Рис. 4.2

Наклон или *крутизна* прямой — это отношение изменения величины y к изменению величины x между любыми двумя точками прямой. Если при увеличении x ($\rightarrow$) y также увеличивается ($\uparrow$), значит, наклон прямой положителен.

На **Рис. 4.3а**:

$$\text{Наклон } AC = \frac{\text{изменение } y}{\text{изменение } x} = \frac{\text{CB}}{\text{BA}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Если при увеличении x ($\rightarrow$) y уменьшается ($\downarrow$), значит, наклон прямой отрицателен.

$$\text{Наклон } DF = \frac{\text{изменение } y}{\text{изменение } x} = \frac{\text{FE}}{\text{ED}} = \frac{11-2}{-3-0} = \frac{9}{-3} = -3.$$

На **Рис. 4.3в** показан график прямой линии $y = 3$. Поскольку прямая горизонтальна, значит, ее наклон равен нулю.

Величина y при $x = 0$ называется ординатой точки пересечения прямой с осью ординат. На **Рис. 4.3а** ордината точки пересечения прямой с осью y равна 1, а на **Рис. 4.3б** она равна 2.

Если задающее график уравнение имеет вид $\boldsymbol{y = mx + c}$, где m и c — константы, то ***график функции всегда будет иметь вид прямой линии***, где m — тангенс угла наклона кривой, а c — ордината точки пересечения прямой оси y. Таким образом, $y = 5x + 2$ представляет прямую с тангенсом угла наклона 5, пересекающую ось y на высоте 2. Аналогично $y = -3x - 4$ представляет прямую линию с наклоном -3, пересекающую ось y на высоте -4.

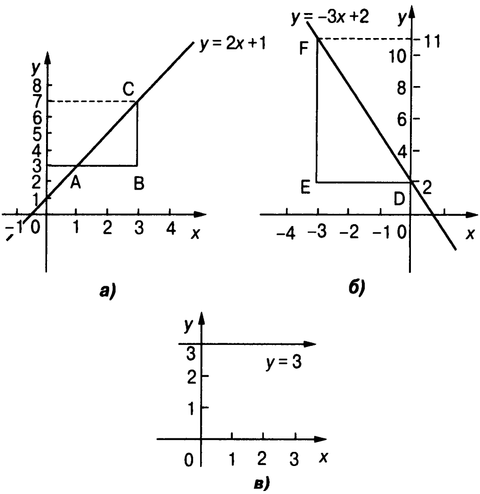


Рис. 4.3

Пример. Определить наклон прямолинейного графика, проходящего через координаты (−2, 5) и (3, 4).

Прямая, проходящая через координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2), имеет наклон, определяемый формулой (см. **Рис. 4.4**)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

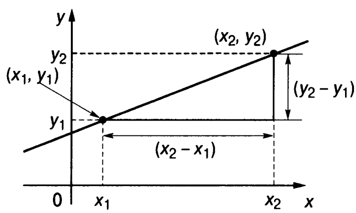


Рис. 4.4

Прямая проходит через точки (−2, 5) и (3, 4); значит, $x_1 = -2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, следовательно, наклон прямой равен

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 5}{3 - (-2)} = -\frac{1}{5}.$$

4.1.3. Общие правила, которые следует соблюдать при построении графиков

- Дать графику понятное название, ясно описывающее, что он иллюстрирует.
- Выбрать масштаб таким образом, чтобы график занимал максимум места в отведенном ему пространстве.
- Выбрать масштаб таким образом, чтобы интерполяция была максимально простой. Обычно масштаб выбирают так, чтобы 1 см = 1 единица или 1 см = 10 единиц. Неудобные масштабы, вроде 1 см = 3 единицы или 1 см = 7 единиц, использовать не следует.
- Оси не обязательно должны начинаться с нуля, особенно в том случае, если при начале отсчета с нуля в малой области графика сосредотачивается большое количество точек.
- Координаты или точки должны быть четко отмечены. Их можно отмечать крестиком, точкой и кружком или просто точкой (**Рис. 4.1**).
- Оси должны быть подписаны, чтобы было ясно, какие величины на них отложены и в каких единицах они измеряются.
- Вдоль каждой оси должно быть отмечено достаточное количество цифровых значений, но так, чтобы цифры не налезали друг на друга.

4.1.4. Практические задачи, включающие прямолинейные графики

Если задан или экспериментально определен набор точек и считается, что он описывается законом вида $y = mx + c$, и если может быть нарисована прямая линия, достаточно близкая к большинству нанесенных на график значений координат, значит, подтверждается существование в данном случае закона $y = mx + c$. По графику можно определить константы m (т. е. наклон графика) и c (т. е. пересечение с осью y). Подобная методика называется ***определением закона*** (разд. 4.2).

Например, температура в градусах Цельсия и соответствующие значения в градусах Фаренгейта приведены в таблице ниже.

°C	10	20	40	60	80	100
°F	50	68	104	140	176	212

Оси с подходящими масштабами показаны на **Рис. 4.5**. Координаты (10, 50), (20, 68), (40, 104) и т. д. отмечены на графике. При соединении координат получается прямая линия. Поскольку получается прямая линия, значит, существует линейная взаимосвязь между градусами Цельсия и Фаренгейта.

Чтобы найти температуру по Фаренгейту при, скажем, 55°C, нарисуем прямую линию AB от горизонтальной оси до пересечения с прямой в точке B. Точка, в которой горизонталь BD пересекает вертикальную ось, отмечает эквивалентную температуру по Фаренгейту. **Следовательно, 55°C соответствует 131°F.**

Процесс нахождения соответствующих значений величин между точками, указанными в таблице, называется *интерполяцией.*

Найдем температуру по Цельсию при, скажем, 167°F. Проводим горизонталь EF, как показано на **Рис. 4.5**. Точка, в которой вертикаль FG пересекает горизонтальную ось, отмечает эквивалентную температуру в градусах Цельсия. Следовательно, 167°F соответствует 75°C.

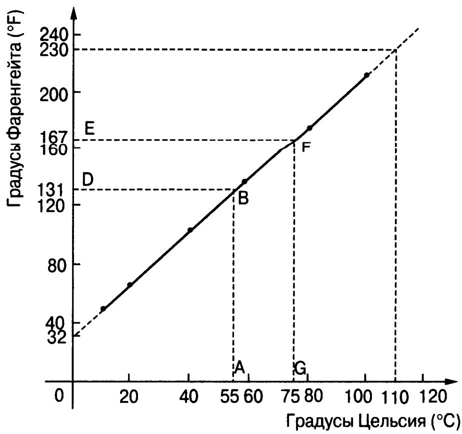


Рис. 4.5

Если предполагается, что график является прямым даже за пределами диапазона имеющихся данных, то график можно продлить с обоих концов (показано пунктирными линиями на **Рис. 4.5**). Из **Рис. 4.5** видно, что 0°C соответствует 32°F, а 230°F соответствует 110°C.

Процесс нахождения соответствующих друг другу значений величин за пределами заданного диапазона значений называется *экстраполяцией.*

Пример. Экспериментальные тесты по определению разрушающего напряжения σ листовой меди при различных температурах t дали следующие результаты:

Разрушающее напряжение σ [Н/см^2]	8.46	8.04	7.78	7.37	7.08	6.63
Температура t [°C]	70	200	280	410	500	640

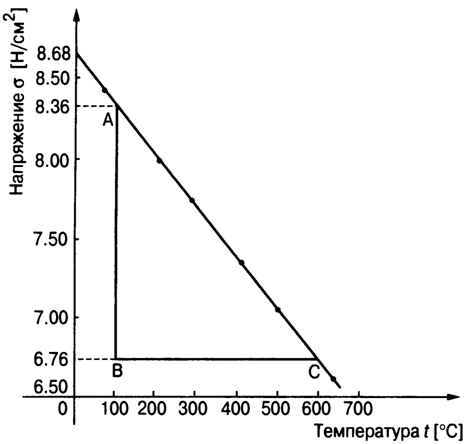


Рис. 4.6

Координаты (70, 8.46), (200, 8.04) и так далее отмечены, как показано на **Рис. 4.6**. Поскольку график — это прямая, значит, величины подчиняются закону $\sigma = at + b$, и наклон прямой равен

$$a = \frac{AB}{BC} = \frac{8.36 - 6.76}{100 - 600} = \frac{1.60}{-500} = -0.0032.$$

Пересечение с вертикальной осью $\boldsymbol{b = 8.68}$. Следовательно, задающий график закон есть $\boldsymbol{\sigma = -0.0032t + 8.68}$.

При температуре, скажем, 250°C напряжение σ определяется формулой

$$\sigma = -0.0032(250) + 8.68 = \mathbf{7.88\ Н/см^2}.$$

Делаем перестановку в $\sigma = -0.0032t + 8.68$, получаем

$$0.0032t = 8.68 - \sigma,$$

$$t = \frac{8.68 - \sigma}{0.0032}.$$

Следовательно, если напряжение составляет, скажем, 7.54 Н/см^2, то температура

$$t = \frac{8.68 - 7.54}{0.0032} = 356.3\ °C.$$

4.2. ПРИВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ В ЛИНЕЙНУЮ ФОРМУ

4.2.1. Нахождение закона

Зачастую отношение между двумя переменными, скажем, x и y, нелинейно, т. е. при построении зависимости x от y получается кривая линия. В подобных случаях нелинейное уравнение можно преобразовать к линейному виду $y = mx + c$ таким образом, чтобы можно было определить константы и связывающий переменные закон. Подобная методика называется *нахождением закона*.

Примеры приведения уравнений к линейному виду:

1. $y = ax^2 + b$ можно выразить в виде $Y = mX + c$, где $m = a$, $c = b$ и $X = x^2$.

Значит, построив график зависимости y от x^2, где значения y откладываются на оси ординат, а значения x^2 — на оси абсцисс, получим прямую линию с наклоном a, пересекающую ось y на высоте b.

2. $y = \frac{a}{x} + b$.

Откладывая на оси ординат значения y, а на оси абсцисс — значения $\frac{1}{x}$, получим прямую линию с наклоном a, пересекающую ось y на высоте b.

3. $y = ax^2 + bx$.

Делим обе части на x: $\frac{y}{x} = ax + b$.

Сравнение с уравнением $Y = mX + c$ показывает, что если значения $\frac{y}{x}$ откладываются на оси ординат, а значения x — на оси абсцисс, то получается прямая с наклоном a, пересекающая ось $\frac{y}{x}$ на высоте b.

Пример. Предположим, что экспериментальные значения x и y, показанные ниже, связаны соотношением $y = ax^2 + b$.

x	1	2	3	4	5
y	9.8	15.2	24.2	36.5	53.0

Если построить зависимость y от x, получится кривая, а определить константы a и b из кривой невозможно. Сравнивая $y = ax^2 + b$ и $Y = mX + c$, видим, что следует построить зависимость y по вертикали от x^2 по горизонтали.

Таблица значений величин, отложенных на координатных осях, приведена ниже.

x	1	2	3	4	5
x^2	1	4	9	16	25
y	9.8	15.2	24.2	36.5	53.0

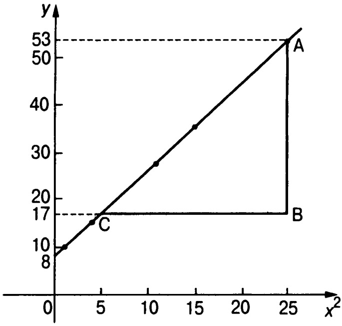


Рис. 4.7

График зависимости y от x^2 показан на **Рис. 4.7**, через точки проходит совершенно прямая линия. Поскольку получен график в виде прямой линии, видно, что закон подтвержден. Из графика видно, что наклон равен

$$a = \frac{AB}{BC} = \frac{53-17}{25-5} = \frac{36}{20} = 1.8$$

и пересечение с осью y есть $\boldsymbol{b = 8.0}$.

Значит, закон, изображенный на графике, есть $\boldsymbol{y = 1.8x^2 + 8.0}$.

Пример. Значения нагрузки L ньютон и расстояния d метров, полученные экспериментально, показаны в следующей таблице.

Нагрузка L [Н]	32.3	29.6	27.0	23.2	18.3	12.8	10.0	6.4
Расстояние d [м]	0.75	0.37	0.24	0.17	0.12	0.09	0.08	0.07

Сравнение $L = \frac{a}{d} + b$, т. е. $L = a\left(\frac{1}{d}\right) + b$, с $Y = mX + c$ показывает, что L — это функция от $\frac{1}{d}$, т. е. по оси ординат откладываются значения L, а по оси абсцисс — значения $\frac{1}{d}$. Таблица значений величин, используемая при построении графика, приведена ниже.

L	32.3	29.6	27.0	23.2	18.3	12.8	10.0	6.4
d	0.75	0.37	0.24	0.17	0.12	0.09	0.08	0.07
$\frac{1}{d}$	1.33	2.70	4.17	5.88	8.33	11.11	12.50	14.29

График зависимости L от $\frac{1}{d}$ показан на **Рис. 4.8**. Через точки может быть проведена прямая линия, значит, нагрузка и расстояние связаны законом вида $L = \frac{a}{d} + b$.

Наклон прямой $a = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{31 - 11}{2 - 12} = \frac{20}{-10} = -2$.

График L пересекает ось ординат на высоте $\boldsymbol{b} = \mathbf{35}$. Следовательно, изображенный на графике закон – это

$$L = -\frac{2}{d} + 35.$$

Когда расстояние L, скажем, составляет 0.20 м, нагрузка

$$L = \frac{-2}{0.20} + 35 = \mathbf{25.0\ Н}.$$

Перестановка $L = -\frac{2}{d} + 35$ дает $\frac{2}{d} = 35 - L$ и $d = \frac{2}{35 - L}$. Следовательно, если нагрузка L равна, скажем, 20 Н, то

$$d = \frac{2}{35 - 20} = \frac{2}{15} = \mathbf{0.13\ м}.$$

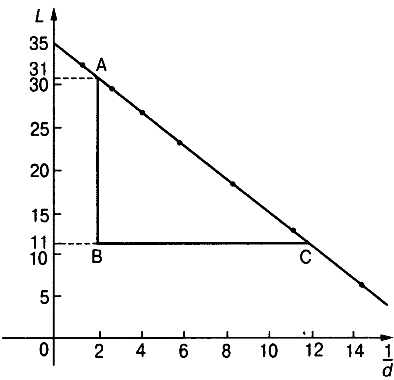


Рис. 4.8

4.2.2. Нахождение законов, содержащих логарифмы

Примеры приведения законов к содержащей логарифмы линейной форме включают:

1. $y = ax^n$.

Беря десятичный логарифм от обеих частей равенства, получим

$$\lg y = \lg(ax^n) = \lg a + \lg x^n,$$

т. е.

$$\lg y = n \lg x + \lg a.$$

Если по оси ординат отложить $\lg y$, а по оси абсцисс — $\lg x$, получим прямую с наклоном n, пересекающую ось y на высоте $\lg a$.

2. $y = ab^x$.

Беря логарифм по основанию 10 от обеих частей равенства, получим

$$\lg y = \lg(ab^x),$$

т. е. $\lg y = \lg a + \lg b^x = x \lg b + \lg a = (\lg b)x + \lg a$.

Если по оси ординат отложить $\lg y$, а по оси абсцисс x, то получается прямая линия с наклоном $\lg b$, пересекающая ось y на высоте $\lg a$.

3. $y = ae^{bx}$.

Беря логарифм по основанию e от обеих частей равенства, получим

$$\ln y = \ln(ae^{bx}),$$

т. е. $\ln y = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx \ln e = bx + \ln a$ (так как $\ln e = 1$).

Если отложить $\ln y$ по оси ординат, а x — по оси абсцисс, то получится прямая линия с наклоном b, пересекающая ось y на высоте $\ln a$.

Пример. Ток через резистор и рассеиваемая им мощность измерены экспериментально, и результаты приведены в таблице.

Ток I [A]	2.2	3.6	4.1	5.6	6.8
Мощность P [Вт]	116	311	403	753	1110

Докажем, что связывающий ток и мощность закон имеет вид $P = RI^n$, где R и n — константы, и определим этот закон.

Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих частей равенства $P = RI^n$:

$$\lg P = \lg(RI^n) = \lg R + \lg I^n =$$
$$= \lg R + n \lg I.$$

То есть $\lg P = n \lg I + \lg R$; это уравнение имеет вид $Y = mX + c$. Значит, по оси ординат нужно откладывать $\lg P$, а по оси абсцисс — $\lg I$. Таблица значений $\lg I$ и $\lg P$ приведена ниже.

I	2.2	3.6	4.1	5.6	6.8
$\lg I$	0.342	0.556	0.613	0.748	0.833
P	116	311	403	753	1110
$\lg P$	2.064	2.493	2.605	2.877	3.045

График зависимости $\lg P$ от $\lg I$ показан на **Рис. 4.9**, и поскольку получена прямая линия, то закон $P = RI^n$ доказан.

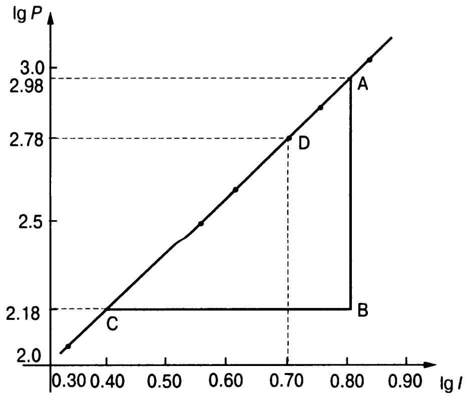


Рис. 4.9

Наклон прямой линии $n = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2.98 - 2.18}{0.8 - 0.4} = \dfrac{0.80}{0.4} = 2$.

В данном случае невозможно определить пересечение с вертикальной осью, поскольку отсчет начинается не в нуле. Выбираем любую точку графика, скажем, D, где $\lg I = 0.70$ и $\lg P = 2.78$, и подставляем эти значения в $\lg P = n \lg I + \lg R$. Получим

$$2.78 = 2 \cdot 0.70 + \lg R,$$

$$\lg R = 2.78 - 1.40 = 1.38.$$

Следовательно, $R = 10^{1.38} = 24.0$.

Итак, график задается законом $P = 24.0I^2$.

Пример. Ток разряда конденсатора уменьшается со временем согласно приведенной ниже таблице.

i [мА]	203	61.14	22.49	6.13	2.49	0.615
t [мс]	100	160	210	275	320	390

Покажем, что эти результаты связаны законом вида $i = Ie^{t/T}$, где I и T — константы.

Берем натуральный логарифм от обеих частей равенства $i = Ie^{t/T}$:

$$\ln i = \ln(Ie^{t/T}) = \ln I + \ln e^{t/T}.$$

То есть $\ln i = \ln I + \frac{t}{T}$ (поскольку $\ln e = 1$), или

$$\ln i = \left(\frac{1}{T}\right)t + \ln I.$$

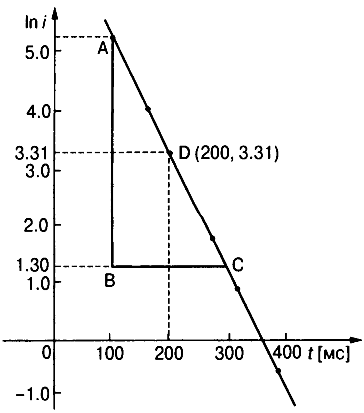


Рис. 4.10

При сравнении с $y = mx + c$ видно, что $\ln i$ следует откладывать по оси ординат, а t — по оси абсцисс. (Методы вычисления натуральных логарифмов рассмотрены в разд. 1.2.)

Другая таблица величин приведена ниже.

t [мс]	100	160	210	275	320	390
i [мА]	203	61.14	22.49	6.13	2.49	0.615
$\ln i$	5.31	4.11	3.11	1.81	0.91	–0.49

График зависимости $\ln i$ от t показан на **Рис. 4.10**, и поскольку получилась прямая линия, то закон $i = Ie^{t/T}$ доказан.

Наклон прямой линии

$$\frac{1}{T} = \frac{AB}{BC} = \frac{5.30 - 1.30}{100 - 300} = \frac{4.0}{-200} = -0.02.$$

Следовательно, $T = \frac{1}{-0.02} = \mathbf{-50}$.

Выберем любую точку на графике, скажем, точку D, где $t = 200$ и $\ln i = 3.31$.

Подставим эти значения в равенство $\ln i = \left(\frac{1}{T}\right)t + \ln I$.

Получим $3.31 = -\frac{1}{50}(200) + \ln I$, откуда

$$\ln I = 3.31 + 4.0 = 7.31$$

и $I = e^{7.31} = 1495$, или 1500 с точностью до 3 значащих цифр.

Следовательно, этот график выражает закон $i = 1500e^{-t/50}$.

4.3. ГРАФИКИ В ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ОСЯХ

4.3.1. Логарифмический масштаб

Для построения графиков выпускается разлинованная бумага, на которой нанесена неравномерная координатная сетка. На такой бумаге расстояния вдоль осей пропорциональны не самим откладываемым величинам, а их логарифмам. Подобные графики называют *графиками с логарифмическим масштабом в обеих осях.*

Логарифмический масштаб показан на **Рис. 4.11**, где расстояние между, скажем, 1 и 2 пропорционально lg1 – lg2, т. е. 0.3010 общего расстояния между 1 и 10. Аналогично расстояние между 7 и 8 пропорционально lg 8 – lg 7, т. е. 0.05799 общего расстояния от 1 до 10. Таким образом, при увеличении чисел от 1 до 10 расстояние между отметками постепенно уменьшается.

В логарифмических осях расставляются и повторяются несколько раз метки от 1 до 9. Число раз, которое разметка повторяется на оси, называется числом *периодов.* Если вертикальная ось имеет, скажем, 3 набора значений от 1 до 9, то бумага для графиков называется «3 логарифмических периода × 2 логарифмических периода» (**Рис. 4.12**). Выпускается множество различных типов бумаги — от «1 логарифмический период × 1 логарифмический период» до «5 логарифмических периодов × 5 логарифмических периодов».

Чтобы отобразить диапазон значений, скажем, от 0.4 до 161 на логарифмической бумаге, потребуется 4 периода: от 0.1 до 1, от 1 до 10, от 10 до 100 и от 100 до 1000.

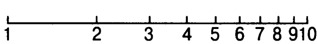


Рис. 4.11

4.3.2. Графики вида $y = ax^n$

Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих частей равенства $y = ax^n$:

$$\lg y = \lg(ax^n) = \lg a + \lg x^n,$$

т. е.

$$\lg y = n \lg x + \lg a,$$

и сравним это с

$$Y = mX + c.$$

Видно, что, если отложить $\lg y$ по оси ординат, а $\lg x$ — по оси абсцисс, получается прямая линия, т. е. уравнение $y = ax^n$ приводится к линейному виду. При наличии бумаги для построения графиков в логарифмических осях можно непосредственно построить x и y без нахождения их логарифмов, как это делалось в разд. 4.2.

Пример. Экспериментальные значения двух связанных величин x и y приведены ниже:

x	0.41	0.63	0.92	1.36	2.17	3.95
y	0.45	1.21	2.89	7.10	20.79	82.46

Предположим, что связывающий x и y закон имеет вид $y = ax^b$, где a и b — константы. Докажем, что такой закон действительно описывает приближенные значения a и b. Если $y = ax^b$, то, как показано выше, $\lg y = b \lg x + \lg a$. Это выражение имеет вид $Y = mX + c$; значит, чтобы получить прямую линию, надо отложить $\lg y$ по вертикали, а $\lg x$ — по горизонтали. Величины x и y можно откладывать непосредственно в логарифмических осях, как показано на **Рис. 4.12**. На графике необходимо отобразить величины y в диапазоне от 0.45 до 82.46, для чего потребуется три периода (т. е. от 0.1 до 1, от 1 до 10 и от 10 до 100).

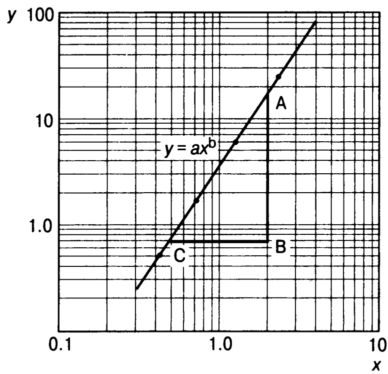


Рис. 4.12

Надо также отобразить величины x в диапазоне от 0.41 до 3.95, для чего потребуется два периода (т. е. от 0.1 до 1 и от 1 до 10). Следовательно, используется бумага типа «3 периода логарифма × 2 периода», как показано на **Рис. 4.12**. Поскольку точки лежат на прямой, закон $y = ax^b$ подтверждается.

Найдем константы a и b.

Метод 1.

Выбираем на прямой две любые точки, скажем, точки A и C, и измеряем AB и BC (скажем, в сантиметрах). Тогда наклон

$$b = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{11.5 \text{ единицы}}{5 \text{ единиц}} = \mathbf{2.3}.$$

Поскольку $\lg y = b \lg x + \lg a$, то при $x = 1$, $\lg x = 0$ и $\lg y = \lg a$.

Прямая пересекает ординату $x = 1.0$ на высоте $y = 3.5$. Следовательно, $\lg a = \lg 3.5$, т. е. $\boldsymbol{a = 3.5}$.

Метод 2.

Выбираем на прямой две любые точки, скажем, точки A и C. Координаты точки A — (2, 17.25), точки C — (0.5, 0.7).

Поскольку $y = ax^b$, то

$$17.25 = a(2)^b \qquad (1)$$

и

$$0.7 = a(0.5)^b. \qquad (2)$$

Получена система двух уравнений, которую можно решить относительно a и b. Делим уравнение (1) на уравнение (2), чтобы сократить на a:

$$\frac{17.25}{0.7} = \frac{(2)^b}{(0.5)^b} = \left(\frac{2}{0.5}\right)^b,$$

т. е.

$$24.643 = (4)^b.$$

Возьмем логарифм от обеих частей уравнения: $\lg 24.643 = b \lg 4$.

Значит, $b = \dfrac{\lg 24.643}{\lg 4} = \mathbf{2.3}$ с точностью до 2 значащих цифр.

Подставим $b = 2.3$ в уравнение (1): $17.25 = a(2)^{2.3}$.

Значит, $a = \dfrac{17.25}{(2)^{2.3}} = \dfrac{17.25}{4.925} = 3.5$ с точностью до 2 значащих цифр.

Следовательно, этот график описывает закон $y = 3.5x^{2.3}$.

4.3.3. Графики вида $y = ab^x$

Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих частей равенства $y = ab^x$:

$$\lg y = \lg(ab^x) = \lg a + \lg b^x = \lg a + x \lg b.$$

Значит, $\lg y = (\lg b)x + \lg a$, что имеет вид

$$Y = mX + c.$$

Таким образом, откладывая $\lg y$ по вертикали, а x — по горизонтали, получим прямую, т. е. график $y = ab^x$ приводится к линейному виду. В данном случае можно использовать линейный масштаб по горизонтальной оси и логарифмический по вертикальной. Такой тип графиков называется *линейно-логарифмическим* и характеризуется числом периодов по логарифмической оси. Например, график с тремя периодами по логарифмической оси называется «3 логарифмических периода × линейная ось».

4.3.4. Графики вида $y = ae^{kx}$

Возьмем логарифм по основанию e от обеих частей уравнения $y = ae^{kx}$:

$$\ln y = \ln(ae^{kx}) = \ln a + \ln e^{kx} = \ln a + kx \ln e.$$

Значит, $\ln y = kx + \ln a$ (поскольку $\ln e = 1$), что имеет вид

$$Y = mX + c.$$

Таким образом, откладывая $\ln y$ по вертикали, а x — по горизонтали, получим прямую линию, т. е. уравнение $y = ae^{kx}$ приводится к линейному виду. В данном случае используется линейный масштаб по горизонтальной оси и логарифмический — по вертикали.

Пример. Пусть напряжение υ вольт, приложенное к индуктивности, связано с временем t мс законом $\upsilon = Ve^{t/T}$, где V и T — константы.

Получены следующие экспериментальные результаты:

υ [В]	883	347	90	55.5	18.6	5.2
t [мс]	10.4	21.6	37.8	43.6	56.7	72.0

Докажем, что представленный закон связывает время и напряжение, и определим приблизительные значения V и T.

Поскольку $\upsilon = Ve^{t/T}$, то $\ln \upsilon = \frac{1}{T} t + \ln V$, что имеет вид $Y = mX + c$. В осях миллиметровки «3 логарифмических периода × линейная ось» построим точки, как показано на **Рис. 4.13**. Поскольку точки соединяются прямой линией, закон $\upsilon = Ve^{t/T}$ доказан.

Наклон прямой линии

$$\frac{1}{T} = \frac{AB}{BC} = \frac{\ln 100 - \ln 10}{36.5 - 64.2} = \frac{2.3026}{-27.7}.$$

Следовательно, $T = \dfrac{-27.7}{2.3026} = \mathbf{-12.0}$ с точностью до 3 значащих цифр.

Поскольку прямая линия на **Рис. 4.13** не пересекает вертикальную ось при $t = 0$, величину V определим, выбрав любую точку, скажем, А с координатами (36.5, 100), и подставим эти величины в $\upsilon = Ve^{t/T}$.

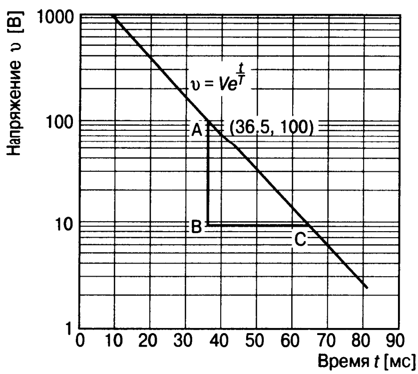


Рис. 4.13

Таким образом, $100 = Ve^{36.5/-12}$, т. е. $V = \dfrac{100}{e^{-36.5/12}} = \mathbf{2090\ В}$ с точностью до 3 значащих цифр.

Следовательно, изображенный на графике закон имеет вид $\upsilon = 2090e^{-t/12.0}$.

Если, скажем, время $t = 25$ мс, то напряжение $\upsilon = 2090e^{-25/12.0} =$ $= \mathbf{260\ В}$.

Если, скажем, напряжение равняется 30.0 В, то $30.0 = 2090e^{-t/12.0}$. Следовательно,

$$e^{-t/12.0} = \frac{30.0}{2090} \text{ и } e^{t/12.0} = \frac{2090}{30.0} = 69.67.$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей уравнения: $\dfrac{t}{12.0} = \ln 69.67 = 4.2438$, откуда время $t = (12.0)(4.2438) = \mathbf{50.9}$ **мс**.

4.4. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

4.4.1. Графические методы решения систем уравнений

Системы линейных уравнений с двумя неизвестными могут быть решены графически следующим образом:

- построение двух прямых в одних осях и
- определение координат точки их пересечения.

Координаты точки пересечения дают искомое решение.

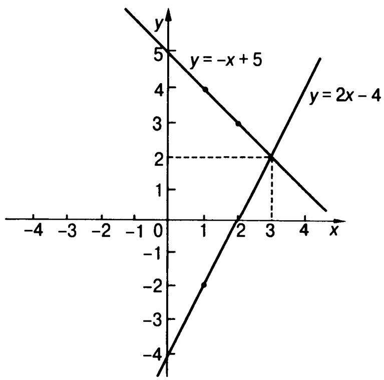


Рис. 4.14

Например, графически решим систему уравнений

$$2x - y = 4,$$
$$x + y = 5.$$

Преобразуем каждое уравнение к виду $y = mx + c$:

$$y = 2x - 4, \qquad (1)$$
$$y = -x + 5. \qquad (2)$$

Для каждого графика достаточно вычислить координаты только трех точек, поскольку эти графики суть прямые линии.

x	0	1	2
$y = 2x - 4$	−4	−2	0

x	0	1	2
$y = -x + 5$	5	4	3

Оба графика построены на **Рис. 4.14**. Они пересекаются в точке (3, 2), и поскольку это единственная точка, которая одновременно принадлежит обеим линиям, то $\boldsymbol{x = 3, y = 2}$ — решение системы уравнений.

(Иногда полезно набросать графики функций, чтобы определить, в какой области лежит точка пересечения. Затем, если нужно, для большей точности строят график более крупного масштаба для «увеличения» точки пересечения.)

4.4.2. Графические методы решения квадратных уравнений

Квадратное уравнение имеет общий вид $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — константы, причем a не равно нулю.

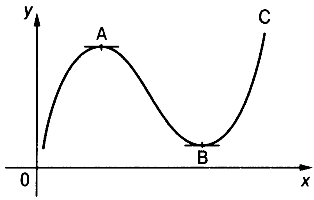


Рис. 4.15

График квадратного уравнения всегда имеет форму, называемую *параболой*. Наклон кривой между 0 и A и между B и C на **Рис. 4.15** положительный, в то время как наклон между A и B — отрицательный. Такие точки, как A и B, называются *точками экстремума*. В точке A наклон графика равен нулю, и при увеличении x наклон кривой меняется с положительного до A на отрицательный после A. Подобные точки называются *максимумами*. В точке B наклон также нулевой, и при увеличении x наклон кривой меняется с отрицательного до B на положительный после B. Подобные точки называются *минимумами*.

Рассмотрим **графики квадратичных функций**.

$y = ax^2$

Графики $y = x^2$, $y = 3x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ показаны на **Рис. 4.16**. Все они имеют минимумы в начале координат в точке (0, 0).

Графики $y = -x^2$, $y = -3x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$ показаны на **Рис. 4.17**.

Все они имеют максимумы в начале координат в точке (0, 0).

При $y = ax^2$:

- кривая симметрична относительно оси y,
- величина a влияет на наклон кривой,
- знак a определяет, максимум это или минимум.

$y = ax^2 + c$

Графики $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 2$, $y = -x^2 + 2$ и $y = ax^2 + c$ показаны на **Рис. 4.18**.

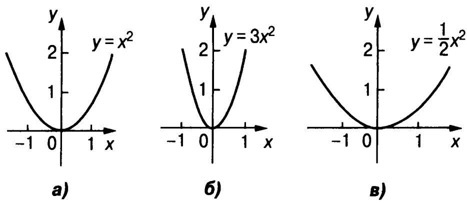


Рис. 4.16

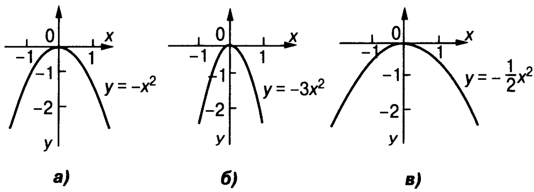


Рис. 4.17

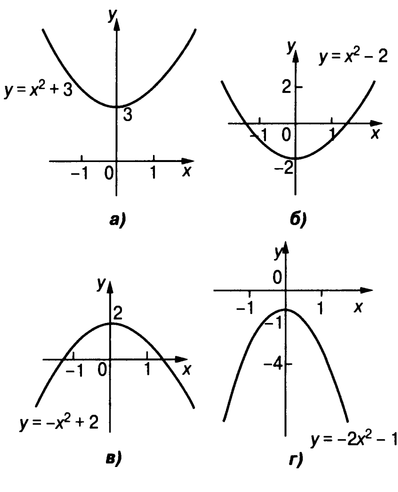


Рис. 4.18

При $y = ax^2 + c$:

- кривая симметрична относительно оси y,
- величина a влияет на наклон кривой,
- константа c — это пересечение с осью y.

$y = ax^2 + bx + c$

Если величина b отлична от нуля, то кривая смещается вправо или влево относительно оси y. Если отношение b/a положительно, кривая смещается влево относительно оси y на $b/2a$, как показано на **Рис. 4.19а**. Если отношение b/a отрицательно, кривая смещается вправо относительно оси y на $b/2a$, как показано на **Рис. 4.19б.**

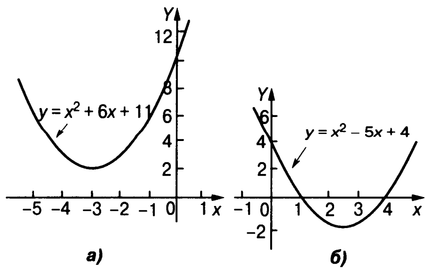


Рис. 4.19

Квадратные уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить графически следующим образом:

- построить график $ax^2 + bx + c = 0$ и
- отметить точки пересечения с осью x (где $y = 0$).

Значения x точек пересечения дают требуемые решения, поскольку в этих точках одновременно $y = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$. Количество решений или корней квадратного уравнения зависит от того, сколько раз кривая пересекает ось x, и может не существовать ни одного действительного корня (как на **Рис. 4.19а**), один корень (как на **Рис. 4.16** и **Рис. 4.17**) или два корня (как на **Рис. 4.19б**).

Пример. Графически решить квадратное уравнение $4x^2 + 4x - 15 = 0$ при условии, что решения лежат в области от $x = -3$ до $x = 2$.

Пусть $y = 4x^2 + 4x - 15$. Ниже приведена таблица значений соответствующих величин.

x	−3	−2	−1	0	1	2
$4x^2$	36	16	4	0	4	16
$4x$	−12	−8	−4	0	4	8
−15	−15	−15	−15	−15	−15	−15
$y = 4x^2 + 4x - 15$	9	−7	−15	−15	−7	9

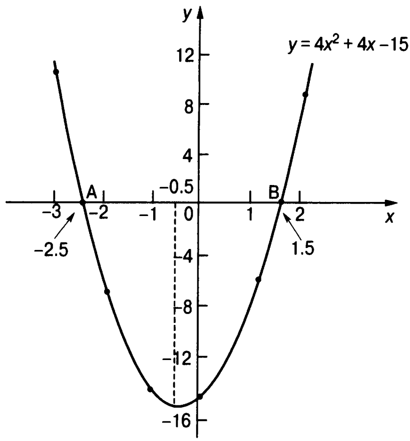


Рис. 4.20

График $y = 4x^2 + 4x - 15$ показан на **Рис. 4.20**. Единственные точки, для которых $y = 4x^2 + 4x - 15$ и $y = 0$, — это точки, отмеченные A и B. Для этих точек $\mathbf{x = -2.5}$ **и** $\mathbf{x = 1.5}$, и это решения квадратного уравнения $4x^2 + 4x - 15 = 0$. (Можно проверить решения, подставив в исходное уравнение $x = -2.5$ и $x = 1.5$.) Кривая имеет точку экстремума в $(-0.5, -16)$, и эта точка является *минимумом.*

Другой графический метод решения уравнения $4x^2 + 4x - 15 = 0$ — это преобразование уравнения к виду $4x^2 = -4x + 15$ с последующим построением двух отдельных графиков, в данном случае это $y = 4x^2$ и $y = -4x + 15$. Точки пересечения этих графиков дадут корни уравнения $4x^2 = -4x + 15$, т. е. $4x^2 + 4x - 15 = 0$. Сказанное проиллюстрировано на **Рис. 4.21**, где корни $x = -2.5$ и $x = 1.5$, как и ранее.

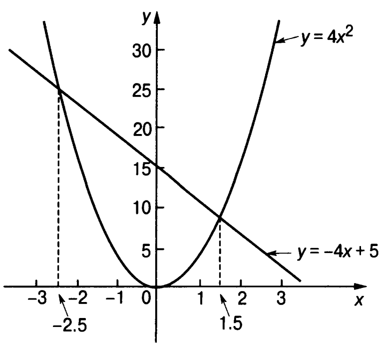


Рис. 4.21

Пример. Построить график $y = -2x^2 + 3x + 6$ для x в интервале от $x = -2$ до $x = 4$ и найти с помощью графика корни следующих уравнений: а) $-2x^2 + 3x + 6 = 0$, б) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$, в) $-2x^2 + 3x + 9 = 0$, г) $-2x^2 + x + 5 = 0$.

Ниже приведена таблица значений.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$-2x^2$	−8	−2	0	−2	−8	−18	−32
$+3x$	−6	−3	0	3	6	9	12
$+6$	6	6	6	6	6	6	6
y	−8	1	6	7	4	−3	−14

График $-2x^2 + 3x + 6$ показан на **Рис. 4.22**.

а) Парабола $y = -2x^2 + 3x + 6$ и прямая $y = 0$ пересекаются в точках A и B, **где x = −1.13 и x = 2.63**, и это корни уравнения $-2x^2 + 3x + 6 = 0$.

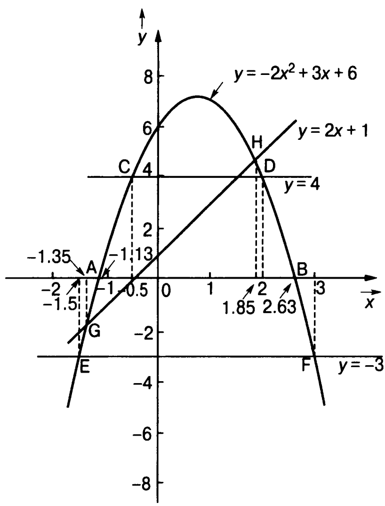


Рис. 4.22

б) Сравнение двух уравнений

$$y = -2x^2 + 3x + 6, \qquad (1)$$

$$0 = -2x^2 + 3x + 2 \qquad (2)$$

показывает, что, если к обеим частям уравнения (2) добавить 4, правые части уравнений будут одинаковы. Следовательно, $4 = -2x^2 + 3x + 6$. Решение этого уравнения находится из точек пересечения прямой $y = 4$ и параболы $y = -2x^2 + 3x + 6$, т. е. точек C и D на **Рис. 4.22**. Следовательно, корни уравнения $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ суть $\boldsymbol{x = -0.5}$ **и** $\boldsymbol{x = 2}$.

в) Уравнение $-2x^2 + 3x + 9 = 0$ можно преобразовать в $-2x^2 + 3x + 6 = -3$, и решение этого уравнения находится из точек пересечения прямой $y = -3$ и параболы $y = -2x^2 + 3x + 6$, т. е. точек E и F на **Рис. 4.22**. Следовательно, корни уравнения $-2x^2 + 3x + 9 = 0$ суть $\boldsymbol{x = -1.5}$ **и** $\boldsymbol{x = 3}$.

г) Сравнение двух уравнений

$$y = -2x^2 + 3x + 6, \tag{3}$$

$$0 = -2x^2 + x + 5 \tag{4}$$

показывает, что, если к обеим частям уравнения (4) добавить $2x + 1$, правые части уравнений будут одинаковы. Следовательно, уравнение (4) можно записать в виде $2x + 1 = -2x^2 + 3x + 6$. Решение данного уравнения находится из точек пересечения прямой $y = 2x + 1$ и параболы $y = -2x^2 + 3x + 6$, т. е. точек G и H на **Рис. 4.22**. Следовательно, корни уравнения $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ суть $\boldsymbol{x = -1.35}$ **и** $\boldsymbol{x = 1.85}$.

4.4.3. Графические методы решения систем, состоящих из линейного и квадратного уравнений

Решение ***системы из одного линейного и одного квадратного уравнений*** может быть получено графически построением прямой линии и параболы в общих осях и определением точек их пересечения. Координаты точек пересечения дают искомое решение.

Пример. Определим графически значения x и y, которые одновременно удовлетворяют уравнениям $y = 2x^2 - 3x - 4$ и $y = 2 - 4x$.

Кривая $y = 2x^2 - 3x - 4$ — это парабола, и ниже приведена таблица значений слагаемых, суммой которых является эта величина.

x	-2	-1	0	1	2	3
$2x^2$	8	2	0	2	8	18
$-3x$	6	3	0	-3	-6	-9
-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
y	10	1	-4	-5	-2	5

$y = 2 - 4x$ — это прямая, и достаточно вычислить только три координаты.

x	0	1	2
y	2	−2	−6

На **Рис. 4.23** показаны два графика, и точки их пересечения, обозначенные A и B, имеют координаты (−2, 10) и (1.5, −4). Следовательно, решениями системы служат значения переменных $\boldsymbol{x = -2, y = 10}$ и $\boldsymbol{x = 1.5, y = -4}$.

(Эти решения можно проверить, подставив их в исходные уравнения.)

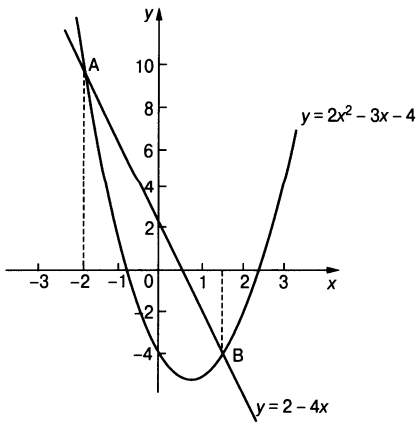


Рис. 4.23

4.4.4. Графические методы решения кубических уравнений

Кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ может быть решено графически. Для этого надо построить график $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и отметить точки пересечения с осью x (т. е. точки, для которых $y = 0$). Значения x в точках пересечения дают искомое решение, поскольку в этих точках $y = 0$ и $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Количество решений или корней кубического уравнения зависит от количества пересечений кривой с осью x, и может существовать один, два или три возможных корня, как показано на **Рис. 4.24**.

Пример. Решить графически кубическое уравнение $4x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0$ при условии, что корни лежат в интервале от $x = -2$ до $x = 3$.

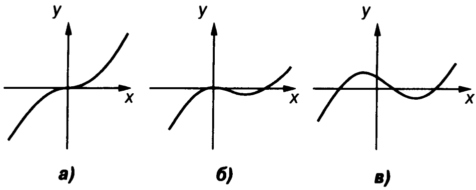


Рис. 4.24

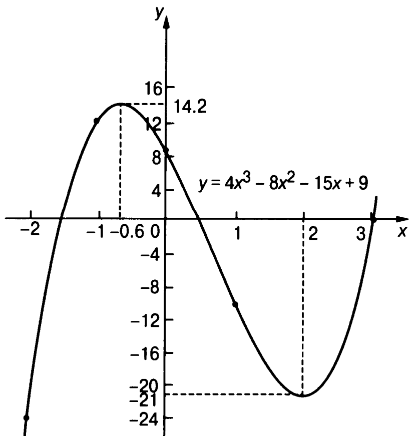


Рис. 4.25

Пусть $y = 4x^3 - 8x^2 - 15x + 9$. Ниже приведена таблица значений слагаемых, сумма которых дает значения этой функции.

x	-2	-1	0	1	2	3
$4x^3$	-32	-4	0	4	32	108
$-8x^2$	-32	-8	0	-8	-32	-72
$-15x$	30	15	0	-15	-30	-45
$+9$	9	9	9	9	9	9
y	-25	12	9	-10	-21	0

График функции $y = 4x^3 - 8x^2 - 15x + 9$ показан на **Рис. 4.25**.

График пересекает ось x (где $y = 0$) при $\boldsymbol{x = -1.5}$, $\boldsymbol{x = 0.5}$ **и** $\boldsymbol{x = 3}$, и это решения кубического уравнения

$$4x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0.$$

Точки экстремума имеют координаты **(–0.6, 14.2)** — это **максимум** и **(2, –21)** — это **минимум**.

4.5. КРИВЫЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В декартовых координатах уравнение кривой выражается в виде соотношения между x и y, т. е. $y = f(x)$.

Аналогично в полярных координатах уравнение кривой выражается в виде $r = f(\theta)$. Если необходимо построить график $r = f(\theta)$, следует составить таблицу значений, которые надо построить, а затем нанести на график координаты (r, θ).

Пример. Построить в полярных координатах график функции $r = 5 \sin\theta$ в интервале между $\theta = 0°$ и $\theta = 360°$, с шагом 30°.

Ниже приведена таблица значений в заданном интервале с шагом 30°.

θ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°
$r = 5\sin\theta$	0	2.50	4.33	5.00	4.33	2.50	0	−2.50

θ	240°	270°	300°	330°	360°
$r = 5\sin\theta$	−4.33	−5.00	−4.33	−2.50	0

График построен на **Рис. 4.26**.

Сначала строим нулевую линию OA, а затем наносим пунктирные линии с шагом 30° (см. **Рис. 4.26**). Максимальная величина r составляет 5.00, в соответствии с этим размечаем OA и рисуем круги с максимальным радиусом 5 единиц, как показано на рисунке. На график наносим полярные координаты (0, 0°), (25.0, 30°), (4.33, 60°), (5.00, 90°)..., они обозначены точками O, B, C, D... на **Рис. 4.26**. Если отметить полярную координату (0, 180°) и соединить точки плавной кривой, получится замкнутая окружность. При построении следующей точки (−2.50, 210°) величина r отрицательна, поэтому ее откладывают в противоположном к 210° направлении, т. е. 2.50 единицы вдоль оси 30°. Следовательно, точка (−2.50, 210°) эквивалентна точке (2.50, 30°).

Аналогично (−4.33, 240°) — это та же точка, что и (4.33, 30°). Когда все координаты отмечены, график $r = 5\sin\theta$ выглядит как одиночная окружность; в действительности же это две окружности, одна поверх другой.

В общем виде кривая $r = a\sin\theta$ в полярных координатах показана на **Рис. 4.27**.

Аналогично предыдущему рассмотренному случаю, можно показать, что полярная кривая $r = a\cos\theta$ имеет вид, показанный на **Рис. 4.28**.

Пример. Построить в полярных координатах график функции $r = 4\sin^2\theta$ в интервале от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ радиан с шагом $\frac{\pi}{6}$.

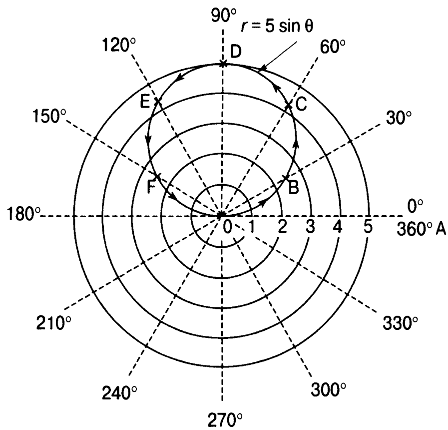


Рис. 4.26

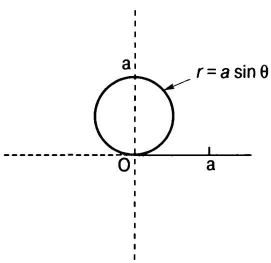


Рис. 4.27

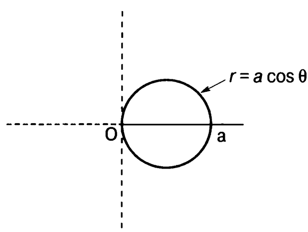


Рис. 4.28

Ниже приведена таблица значений величин, используемых при построении графика.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
$\sin\theta$	0	0.50	0.866	1.00	0.866	0.50	0	– 0.50
$r = 4\sin^2\theta$	0	1	3	4	3	1	0	1

θ	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	–0.866	–1.00	–0.866	–0.50	0
$r = 4\sin^2\theta$	3	4	3	1	0

Сначала строим нулевую линию ОА, затем рисуем пунктирные прямые с шагом $\frac{\pi}{6}$ радиан (или 30°). Максимальная величина r равняется 4; соответственно размечаем ОА и рисуем окружности с максимальным радиусом 4 единицы.

На график наносим полярные координаты $(0, 0)$, $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{3}\right), \ldots, (0, \pi)$ и отмечаем точки O, B, C, D, E, F, O соответственно. Таким образом, получаются два отдельных контура, показанных на **Рис. 4.29**. В общем виде полярная кривая $r = a\sin^2\theta$ показана на **Рис. 4.30**. Аналогичным образом можно показать, что кривая $r = a\cos^2\theta$ имеет вид, приведенный на **Рис. 4.31**.

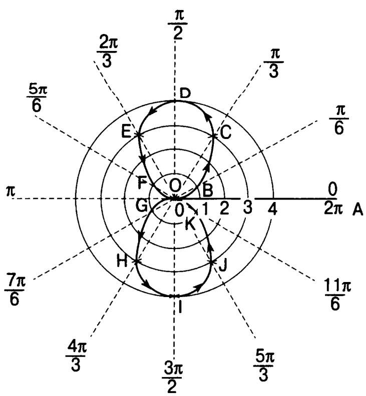
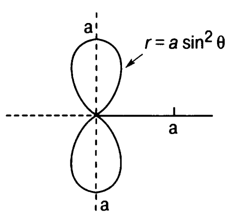


Рис. 4.29



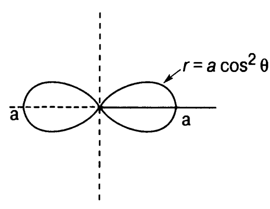


Рис. 4.30 **Рис. 4.31**

Пример. Построить в полярных координатах график функции $r = 3\sin 2\theta$ в интервале от $\theta = 0°$ до $\theta = 360°$ с шагом 15°.

Ниже приведена таблица значений этой функции.

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°
$r = 3\sin 2\theta$	0	1.5	2.6	3.0	2.6	1.5	0	−1.5	−2.6	−3.0

θ	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°
$r = 3\sin 2\theta$	−2.6	−1.5	0	1.5	2.6	3.0	2.6

θ	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
$r = 3\sin 2\theta$	1.5	0	−1.5	−2.6	−3.0	−2.6	−1.5	0

График функции в полярных координатах $r = 3 \sin 2\theta$ показан на **Рис. 4.32**, и видно, что он содержит четыре одинаковых контура, расположенных под углом 90° друг относительно друга.

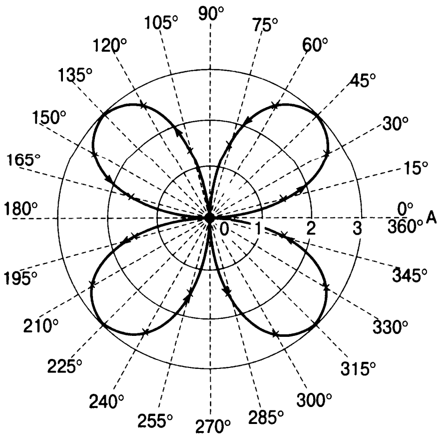


Рис. 4.32

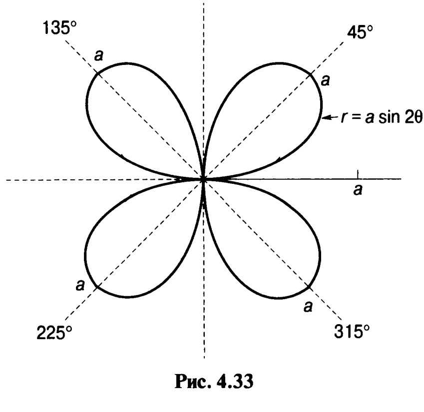


Рис. 4.33

В общем виде полярная кривая $r = a \sin 2\theta$ показана на **Рис. 4.33**.
Аналогичным образом можно показать, что полярные кривые $r = a \cos 2\theta$, $r = a \sin 3\theta$ и $r = a \cos 3\theta$ имеют вид, показанный на **Рис. 4.34**.

Пример. Построить полярную кривую $r = 2\theta$ в интервале от $\theta = 0$ до $\theta = \dfrac{5\pi}{2}$ с шагом $\dfrac{\pi}{6}$.

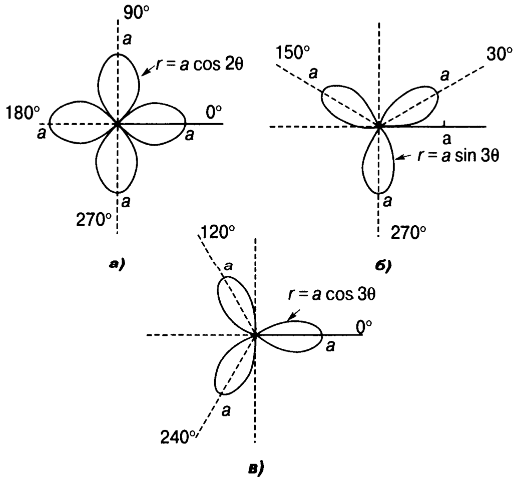


Рис. 4.34

Ниже приведена таблица значений.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$r = 2\theta$	0	1.05	2.09	3.14	4.19	5.24	6.28	7.33	8.38

θ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
$r = 2\theta$	9.42	10.47	11.52	12.57	13.61	14.66	15.71

График функции $r = 2\theta$ в полярных координатах показан на **Рис. 4.35** и представляет собой монотонно раскручивающуюся спираль.

Пример. Построить полярную кривую $r = 5(1 + \cos\theta)$ в интервале от $\theta = 0°$ до $\theta = 360°$ с шагом 30°.

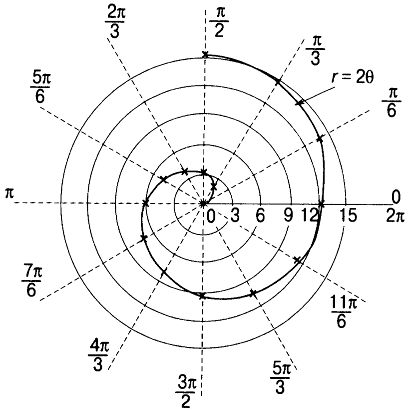


Рис. 4.35

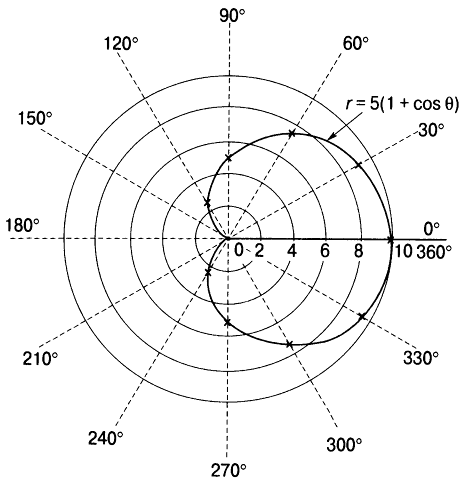


Рис. 4.36

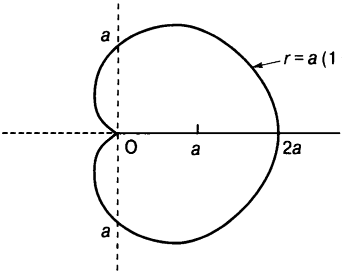


Рис. 4.37

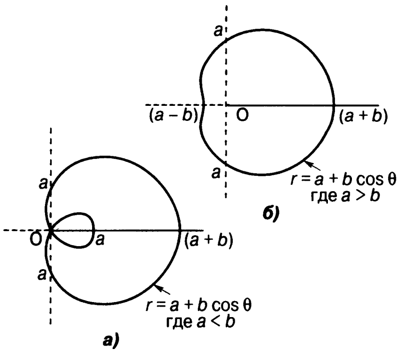


Рис. 4.38

Ниже приведена таблица значений.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
$r = 5(1 + \cos\theta)$	10.0	9.33	7.50	5.00	2.50	0.67

θ	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$r = 5(1 + \cos\theta)$	0	0.67	2.50	5.00	7.50	9.33	10.00

Полярная кривая $r = 5(1 + \cos\theta)$ приведена на **Рис. 4.36**.

Общий вид полярной кривой $r = a(1 + \cos\theta)$ показан на **Рис. 4.37**, она называется *кардиоидой*.

Аналогичным образом можно показать, что полярная кривая $r = a + b\cos\theta$ меняет форму в зависимости от соответствующих значений a и b. При $a = b$ получается полярная кривая, показанная на **Рис. 4.37**. Общая форма кривой при $a < b$ приведена на **Рис. 4.38а**, а общая форма кривой при $a > b$ — на **Рис. 4.38б**.

4.6. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

4.6.1. Стандартные кривые

Если известно некое математическое выражение, можно вычислить координаты в ограниченном диапазоне значений и визуально представить выражение в виде графика в диапазоне вычисленных значений. Иногда полезно указать все характерные особенности выражения, в этом случае можно построить характеризующий его график, в котором будут показаны все характерные особенности выражения, а точность построения точек не будет иметь столь важное значение. Подобная методика называется *построение графика* и может включать использование дифференциального исчисления, например, для определения точек экстремума.

Если, скажем, y зависит от x, то говорят, что y — это функция от x, и их связь выражается как $y = f(x)$, где x называется независимой переменной, а y — зависимой.

В научных исследованиях и инженерном деле соответствующие величины получают в результате тестов или экспериментов.

Далее приведено краткое описание стандартных кривых, некоторые уже встречались в данной книге ранее.

- *Прямая*. Общее уравнение прямой имеет вид $y = mx + c$, где m — наклон (т. е. $\frac{dy}{dx}$), а c — пересечение с осью y. График см. в разд. 4.1.
- *Квадратичные функции*. Общее уравнение квадратичной функции имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, и форма ее графика — парабола. График см. в разд. 4.4.
- *Кубические уравнения*. Общий вид кубической функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. График см. в разд. 4.4.
- *Тригонометрические функции*. Графики $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ и $y = \operatorname{tg}\theta$ показаны на **Рис. 3.39** (разд. 3.5).
- *Окружность*. Простейшее уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$, как показано на **Рис. 2.16**.

  В общем случае уравнение окружности с центром в точке (a, b) и радиусом r имеет вид $(x - a)^2(y - b)^2 = r^2$.
- *Эллипс*. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, и его общая форма показана на **Рис. 4.39.**

  Длина AB называется *большой осью,* а CD — *малой осью.* В приведенном выше уравнении a — это большая полуось, b — малая полуось. (Отметим, что при $b = a$ уравнение приобретает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.)

- *Гипербола*. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и ее общая форма показана на **Рис. 4.40**. Кривая симметрична относительно обеих осей — x и y.
- *Равнобочная гипербола*. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид $xy = c$ или $y = \frac{c}{x}$, и ее общая форма показана на **Рис. 4.41**.
- *Логарифмические функции*. Общий вид функций $y = \ln x$ и $y = \lg x$ показан на **Рис. 1.7** и **Рис. 1.8** на стр. 69-70.
- *Экспоненциальные функции*. Общий вид функции $y = e^x$ показан на **Рис. 1.9** на стр. 73.
- *Полярные кривые*. Уравнение полярной кривой имеет вид $r = f(\theta)$, и примеры полярных кривых можно найти в разд. 4.5.

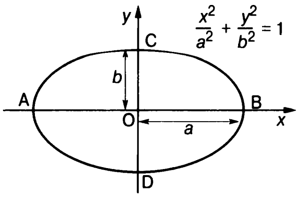


Рис. 4.39

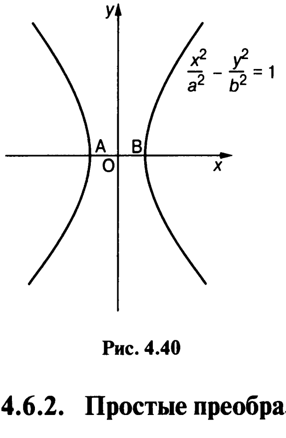


Рис. 4.40

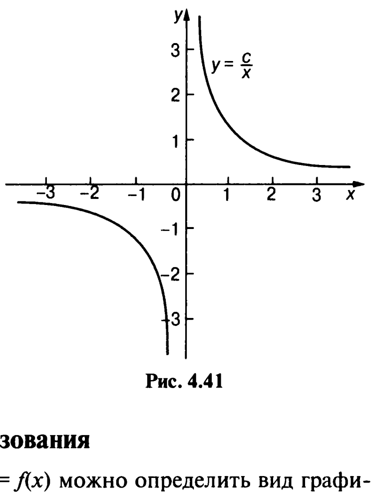


Рис. 4.41

4.6.2. Простые преобразования

По графику функции $y = f(x)$ можно определить вид графиков других функций, которые являются преобразованиями функции $y = f(x)$. Например, зная график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций $y = af(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(ax)$, $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$.

$y = af(x)$

Для каждой точки (x_1, y_1) на графике $y = f(x)$ существует соответствующая точка (x_1, ay_1) на графике $y = af(x)$. Таким образом, график функции $y = af(x)$ может быть получен при растяжении графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в a раз. На **Рис. 4.42а** показаны графики функций $y = x + 1$ и $y = 3(x + 1)$, а на **Рис. 4.42б** показаны графики функций $y = \sin\theta$ и $y = 2\sin\theta$.

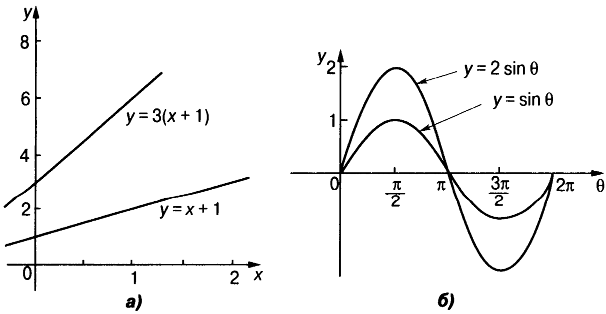


Рис. 4.42

$y = f(x) + a$

График функции $y = f(x)$ переносится на a единиц параллельно оси y для получения графика функции $y = f(x) + a$. Например, если $f(x) = x$, $y = f(x) + 3$ — это $y = x + 3$, как показано на **Рис. 4.43а**. Аналогично если $f(\theta) = \cos\theta$, то $y = f(\theta) + 2$ — это $y = \cos\theta + 2$, как показано на **Рис. 4.43б**. Если же $f(x) = x^2$, то $y = f(x) + 3$ — это $y = x^2 + 3$, как показано на **Рис. 4.43в**.

$y = f(x + a)$

График $y = f(x)$ переносится на a единиц вдоль оси x для получения $y = f(x + a)$. Если $a > 0$, тогда $y = f(x)$ смещается в отрицательном направлении вдоль оси x (т. е. влево), а если $a < 0$, тогда $y = f(x)$ смещается в положительном направлении вдоль оси x (т. е. вправо). Например, если $f(x) = \sin x, y = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ превращается в $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, как показано на **Рис. 4.44а**, а график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ показан на **Рис. 4.44б**.

Аналогично графики $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$ и $y = (x + 2)^2$ показаны на **Рис. 4.45**.

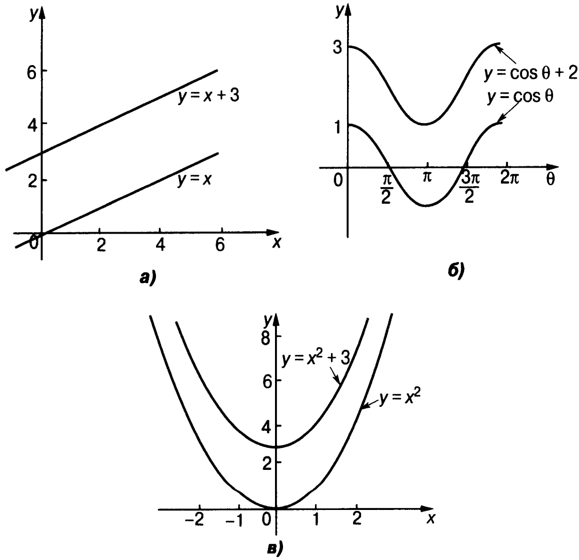


Рис. 4.43

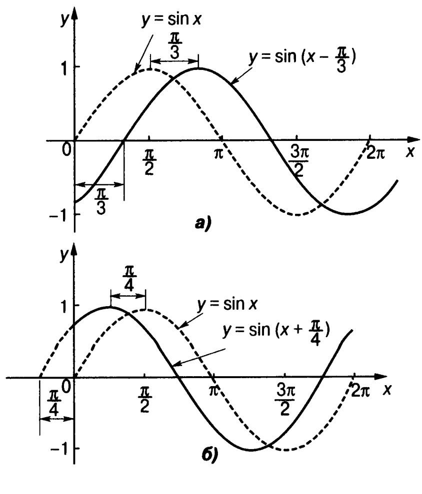


Рис. 4.44

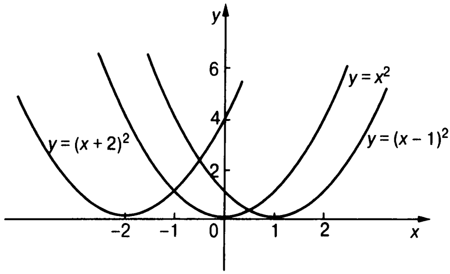


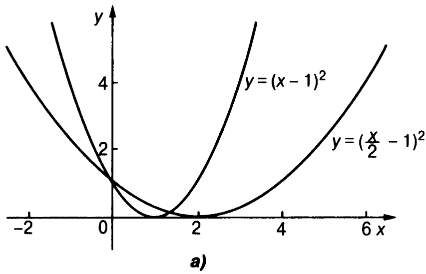
Рис. 4.45

$y = f(ax)$

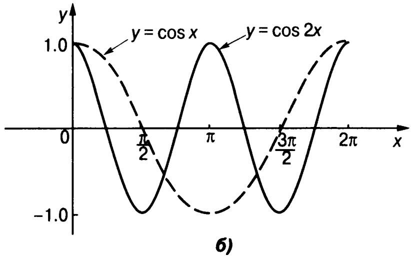
Для каждой точки (x_1, y_1) на графике функции $y = f(x)$ существует соответствующая точка $\left(\frac{x_1}{a}, y_1\right)$ на графике функции $y = f(ax)$. Таким образом, график функции $y = f(ax)$ можно получить, растянув график функции $y = f(x)$ вдоль оси x в $\frac{1}{a}$ раз. Например, если $f(x) = (x-1)^2$ и $a = \frac{1}{2}$, то $f(ax) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$.

Обе кривые приведены на **Рис. 4.46а**.

Графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos 2x$ показаны на **Рис. 4.46б.**



а)



б)

Рис. 4.46

$y = -f(x)$

График $y = -f(x)$ получают, отразив $y = f(x)$ относительно оси x. Например, на **Рис. 4.47а** показаны графики $y = e^x$ и $y = -e^x$, а на **Рис. 4.47б** — графики $y = x^2 + 2$ и $y = -(x^2 + 2)$.

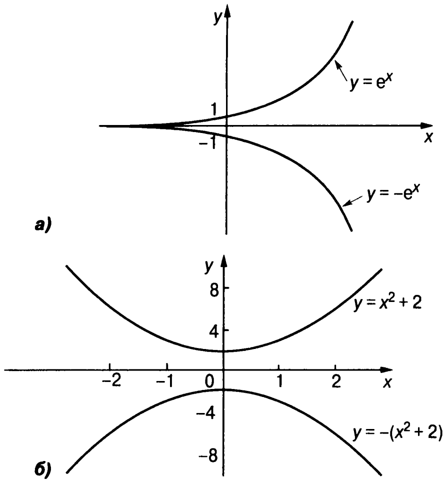


Рис. 4.47

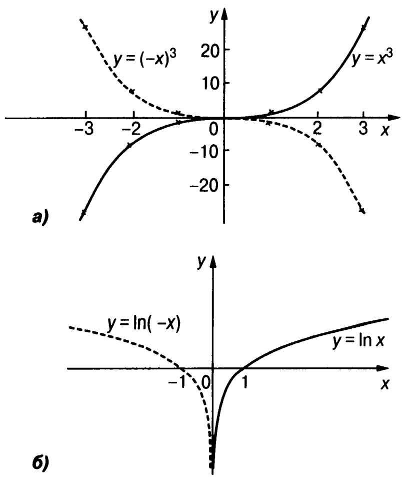


Рис. 4.48

$y = f(-x)$

График $y = f(-x)$ получают, отразив $y = f(x)$ относительно оси y. Например, на **Рис. 4.48а** показаны графики $y = x^2$ и $y = (-x)^3 = -x^3$, а на **Рис. 4.48б** — графики $y = \ln x$ и $y = \ln(-x)$.

4.6.3. Периодические функции

Говорят, что функция $y = f(x)$ *периодическая,* если $f(x + T) = f(x)$ для всех значений x, где T — некоторое положительное число. T — это интервал между двумя последовательными повторами, он называется *периодом* функции $f(x)$. Например, функция $y = \sin x$ периодическая по x с периодом 2π, поскольку $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi)$ и так далее. Аналогично $y = \cos x$ — периодическая функция с периодом 2π, поскольку $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi)$ и так далее. В общем случае, когда $y = \sin \omega t$ или $y = \cos \omega t$, период равен $2\pi/\omega$. Функция, показанная на **Рис. 4.49**, также периодическая с периодом 2π, и задается она формулами

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } & -\pi \le x \le 0, \\ 1 \text{ при } & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

4.6.4. Непрерывные и разрывные функции

Если график функции не имеет резких скачков и разрывов, она называется *непрерывной функцией*; примерами могут служить функции синуса и косинуса. Однако существуют графики с конечными разрывами в одной или нескольких точках интервала. Прямоугольный сигнал на **Рис. 4.49** имеет *конечный разрыв* при $x = \pi$, 2π, 3π и так далее; следовательно, это *разрывная функция*. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ — еще один пример разрывной функции.

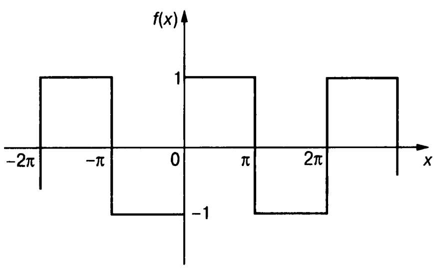


Рис. 4.49

4.6.5. Четные и нечетные функции

Четные функции

Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$ для всех значений x. Графики четных функций всегда ***симметричны относительно оси y*** (т. е. совпадают со своим зеркальным отображением относительно этой оси). Два примера четных функций, $y = x^2$ и $y = \cos x$, показаны на **Рис. 4.50**.

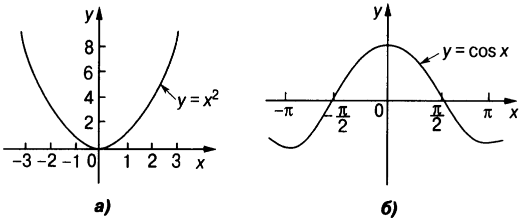


Рис. 4.50

Нечетные функции

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех значений x. Графики нечетных функций всегда ***симметричны относительно начала координат***. Два примера нечетных функций, $y = x^3$ и $y = \sin x$, показаны на **Рис. 4.51**. Существует огромное разнообразие функций, которые не являются ни четными, ни нечетными, например $y = e^x$ и $y = \ln x$.

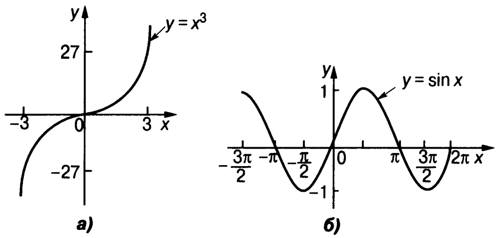


Рис. 4.51

4.6.6. Обратные функции

Если y — это функция от x, то график зависимости y от x можно использовать для нахождения x при любом заданном значении y. Таким образом, график также выражает, что x — это функция от y. Две эти функции называются обратными друг другу.

В общем виде, если задана функция $y = f(x)$, обратную ей функцию можно найти, выразив x через y и затем поменяв ролями x и y. Обратная функция обозначается $y = f^{-1}(x)$.

Пример. Если $y = 2x + 1$, обратная функция определяется следующим образом.

Выразим x через y. Получим $x = \frac{y-1}{2} = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$.

Поменяем ролями x и y, в итоге получим $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Таким образом, если $f(x) = 2x+1$, то $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

График $y = 2x + 1$ и обратной ей функции $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ показан на **Рис. 4.52**, откуда видно, что $f^{-1}(x)$ является отражением $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

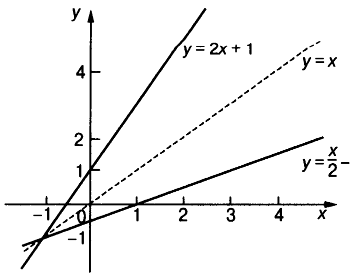


Рис. 4.52

Пример. Если $y = x^2$, то обратная функция определяется следующим образом: надо выразить x через y, т. е. найти $x = \pm\sqrt{y}$, и поменять местами x и y, т. е. записать $y = \pm\sqrt{x}$. Тогда обратная функция имеет два значения для каждого значения x. Таким образом, $y = x^2$ не имеет единственной обратной функции. В таком случае можно ограничить область определения исходной функции $y = x^2$ в пределах $x > 0$. Тогда обратная функция $y = +\sqrt{x}$.

График $f(x) = x^2$ и обратной ей функции $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ для $x > 0$ показан на **Рис. 4.53**, и снова видно, что $f^{-1}(x)$ является отражением $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

Из последнего примера видно, что не все функции имеют единственную обратную функцию. Однако ее можно найти, если область определения исходной функции должным образом ограничить.

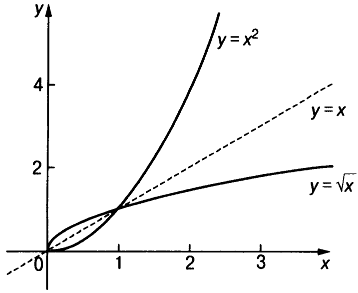


Рис. 4.53

4.6.7. Обратные тригонометрические функции

Если $y = \sin x$, то x — это угол, синус которого равен y. *Обратные тригонометрические функции* обозначают приставкой «arc» или используют обозначение $^{-1}$. Тогда, если решить уравнение $y = \sin x$ относительно x, получим: $x = \arcsin y$ или $\sin^{-1}y$. Поменяв местами x и y, получим $y = \arcsin x$ или $\sin^{-1}x$.

Аналогично $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ — это все обратные тригонометрические функции. Угол в них всегда выражается в радианах.

Обратные тригонометрические функции являются периодическими, поэтому необходимо определить минимальное или главное значение угла. Для $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccosec} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ главное значение лежит в диапазоне $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Для $\arccos x$ и $\operatorname{arcsec} x$ главное значение лежит в диапазоне $0 < y < \pi$.

Графики шести обратных тригонометрических функций показаны на **Рис. 9.15**.

Пример. Определить главное значение: а) $\arcsin 0.5$, б) $\operatorname{arctg}(-1)$, в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Используем калькулятор:

а) $\arcsin 0.5 = \sin^{-1}0.5 = 30° = \frac{\pi}{6}$ **радиан или 0.5236 рад**.

б) $\operatorname{arctg}(-1) = \operatorname{tg}^{-1}(-1) = -45° = -\frac{\pi}{4}$ **рад или −0.7854 рад**.

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150° = \frac{5\pi}{6}$ **рад или 0.5236 рад**.

4.6.8. Асимптоты

Если составить таблицу значений функции $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ при различных значениях x, а потом построить зависимость y от x, получится график, показанный на **Рис. 4.54**. Прямые AB, т. е. $x = -1$, и CD, т. е. $y = 1$, называются *асимптотами*. Асимптота кривой — это прямая, к которой стремится функция при удалении от начала координат. Другое определение асимптоты — касательная к кривой в бесконечно удаленной точке.

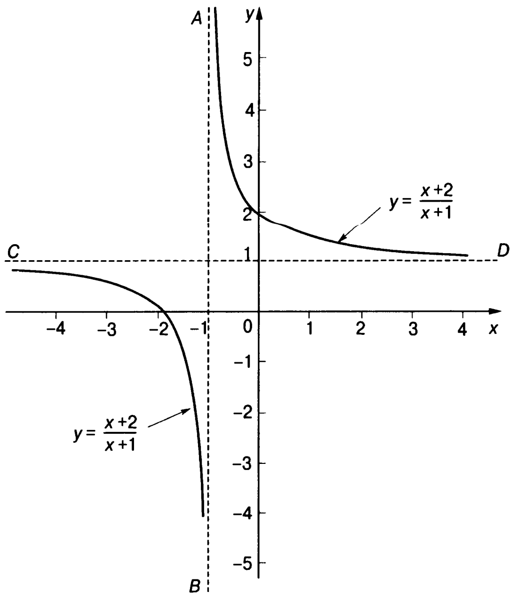


Рис. 4.54

Асимптоты, параллельные осям x и y

Есть простое правило, которое позволяет определить параллельные осям x и y асимптоты. Для кривой $y = f(x)$:

- Асимптоты, параллельные оси x, можно найти, приравняв к нулю коэффициент при наибольшей степени x.
- Асимптоты, параллельные оси y, можно найти, приравняв к нулю коэффициент при наибольшей степени y.

Для предыдущего примера $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ преобразование исходной формулы дает

$$y(x+1) = x+2,$$

т. е.

$$yx + y - x - 2 = 0 \qquad (1)$$

и

$$x(y-1) + y - 2 = 0.$$

Коэффициент при наибольшей степени x (в данном случае это x^1) равен $(y-1)$.

Приравниваем его к нулю: $y - 1 = 0$, откуда $y = 1$ — это асимптота для $y = \frac{x+2}{x+1}$, показанная на **Рис. 4.54**.

Возвращаемся к уравнению (1): $yx + y - x - 2 = 0$, откуда

$$y(x+1) - x - 2 = 0.$$

Коэффициент при наибольшей степени y (в данном случае это y^1) равен $(x+1)$.

Приравниваем его к нулю: $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$; это асимптота $y = \frac{x+2}{x+1}$, показанная на **Рис. 4.54**.

Другие асимптоты

Простая процедура определения асимптот, не параллельных осям x и y, такова:

- подставить $y = mx + c$ в заданное уравнение;
- упростить выражение;
- приравнять коэффициенты при двух наибольших степенях x к нулю и определить значения m и c. Тогда уравнение прямой $y = mx + c$ даст асимптоту.

Пример. Определить асимптоты функции, заданной уравнением $y(x+1) = (x-3)(x+2)$.

Подставляем в уравнение $y = mx + c$. Получим

$$(mx + c)(x+1) = (x-3)(x+2).$$

Упрощаем:

$$mx^2 + mx + cx + c = x^2 - x - 6,$$

$$(m-1)x^2 + (m + c + 1)x + c + 6 = 0.$$

Приравниваем коэффициент при наибольшей степени x к нулю. Получим $m - 1 = 0$, откуда $m = 1$.

Приравниваем коэффициент при следующей наибольшей степени x к нулю:

$$m + c + 1 = 0.$$

Поскольку $m = 1$, $1 + c + 1 = 0$, т. е. $c = -2$.

Следовательно, $y = mx + c = 1x - 2$.

Итак, **$y = x - 2$ есть асимптота**.

Определим асимптоты, параллельные оси x:

Раскроем скобки $(x + 1) = (x - 3)(x + 2)$.

Получим $yx + y = x^2 - x - 6$.

Коэффициент при наибольшей степени x (т. е. при x^2) равен 1. Приравниваем его к нулю, получаем $1 = 0$, это не уравнение прямой. Следовательно, **параллельных оси x асимптот нет**.

Определим асимптоты, параллельные оси y.

Поскольку $y(x + 1) = (x - 3)(x + 2)$, коэффициент при наибольшей степени y равен $x + 1$. Приравниваем его к нулю: $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$. Следовательно, **$x = -1$ — асимптота**.

При $x = 0$, $y(1) = (-3)(2)$, т. е. $y = -6$.

При $y = 0$, $0 = (x - 3)(x + 2)$, т. е. $x = 3$ и $x = -2$.

График функции $y(x + 1) = (x - 3)(x + 2)$ показан на **Рис. 4.55**.

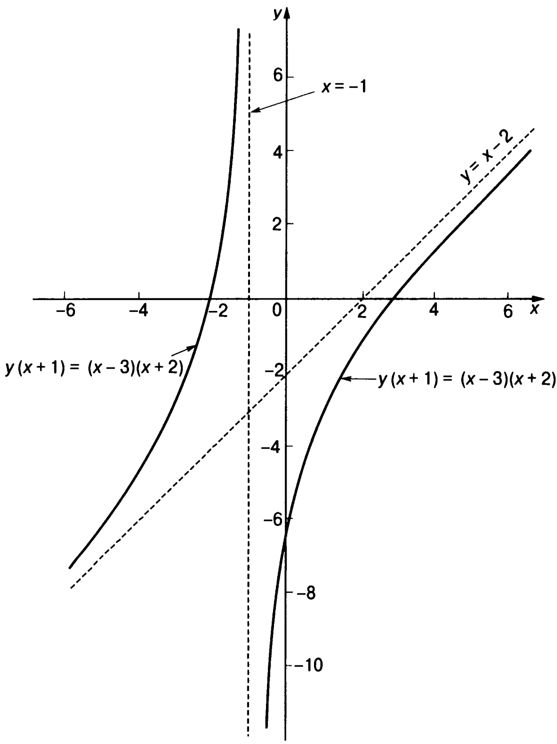


Рис. 4.55

4.6.9. Краткое руководство по построению графиков

Ниже приведена последовательность шагов, позволяющая построить графики многих функций $y = f(x)$.

1. Вычислив производную и определив ее нули, устанавливаем положения и характер точек экстремума (разд. 9.3).

2. Определяем, где кривая пересекает оси x и y.

3. Проверяем уравнение на симметрию:

- если уравнение не меняется при подстановке $-x$ вместо x, то график симметричен относительно оси y (т. е. это четная функция);
- если уравнение не меняется при подстановке $-y$ вместо y, то график симметричен относительно оси x;
- если $f(-x) = -f(x)$, то график симметричен относительно начала координат (т. е. это нечетная функция).

4. Определяем, есть ли асимптоты.

Глава 5

Векторы

5.1. ВЕКТОРЫ

5.1.1. Введение

Некоторые физические величины полностью определяются числовым значением и называются *скалярными величинами* или *скалярами*. Например, скалярами являются время, масса, температура, энергия и объем. Другие физические величины определяются и числовым значением, и направлением в пространстве, их называют *векторными величинами* или *векторами*. Например, сила, скорость, момент силы и перемещение.

5.1.2. Сложение векторов

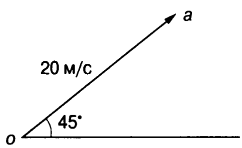


Рис. 5.1

Вектор может быть представлен отрезком прямой, длина которого пропорциональна значению величины, а его направление совпадает с направлением векторной величины. Чтобы однозначно определить направление вектора, используется стрелка. Стрелка располагается на конце вектора. На **Рис. 5.1** показана скорость 20 м/с, направленная под углом 45° к горизонтали, она может быть описана как ***oa*** = 20 м/с, под углом 45° к горизонтали.

Чтобы различить векторные и скалярные величины, используют разные способы:

- **выделение жирным шрифтом;**
- две заглавные буквы со стрелкой наверху, обозначающей направление, например $\overrightarrow{AB}$, где A — начальная точка, а B — конечная точка вектора;
- черта над буквами, например $\overline{AB}$ или $\bar{a}$;
- буквы со стрелкой наверху, например $\vec{a}, \vec{A}$;
- подчеркнутые буквы, например $\underline{a}$;

- $xi + jy$, где i и j — оси, расположенные под прямым углом друг к другу; например, $3i + 4j$ означает 3 единицы в направлении i и 4 единицы в направлении j, как показано на **Рис. 5.2**;
- в виде вектор-столбца $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; например, вектор **OA**, показанный на **Рис. 5.2**, будет иметь вид $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Так, на **Рис. 5.2** $\mathbf{OA} \equiv \overrightarrow{OA} \equiv \overline{OA} \equiv 3i + 4j \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

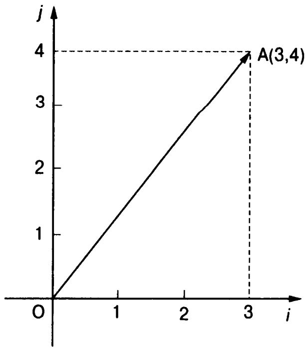


Рис. 5.2

В данной книге будем обозначать векторные величины **жирным шрифтом**.

Таким образом, ***oa*** представляет собой векторную величину, а *oa* — модуль вектора ***oa***. Как и ранее, положительные углы откладываются против часовой стрелки от горизонтальной линии, направленной вправо, отрицательные — по часовой стрелке от той же линии. Таким образом, 90° — это линия, направленная вертикально вверх, а –90° — линия, направленная вертикально вниз.

Показанный на **Рис. 5.3а** результат сложения двух векторов, скажем, $\boldsymbol{V_1}$, лежащего под углом θ_1, и $\boldsymbol{V_2}$, лежащего под углом θ_2, можно получить, нарисовав ***oa*** для представления $\boldsymbol{V_1}$ и ***ar*** для представления $\boldsymbol{V_2}$. Итоговый вектор $\boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2}$ — это ***or***. Все сказанное проиллюстрировано на **Рис. 5.3б**, векторное уравнение имеет вид ***oa*** + ***ar*** = ***or***. Такой метод векторного сложения называется «***нос к хвосту***» (*метод треугольника*).

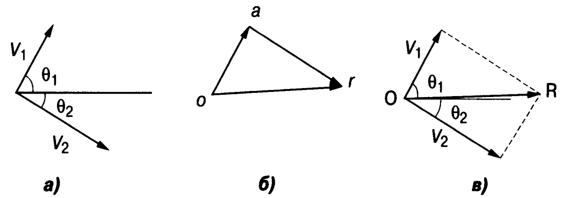


Рис. 5.3

Другой способ – нарисовать прямые, параллельные V_1 и V_2, от концов векторов V_2 и V_1 соответственно, и пусть R — точка пересечения этих прямых. Тогда OR определяет величину и направления результата сложения векторов V_1 и V_2, как показано на **Рис. 5.3в**. Этот метод векторного сложения называется *методом параллелограмма*.

Пример. Сила 4 Н приложена под углом 45° относительно второй силы 7 Н, обе силы действуют на точку (см. **Рис. 5.4а**). Найти величину результирующего воздействия этих двух сил относительно силы 7 Н методами треугольника и параллелограмма.

Хотя сила 7 Н показана на **Рис. 5.4а** в виде горизонтальной линии, ее можно нарисовать в любом направлении.

При использовании *метода треугольника* рисуем горизонтально отрезок длиной 7 единиц для получения вектора ***oa*** с **Рис. 5.4б**. От конца этого вектора рисуем вектор ***ar*** длиной 4 единицы под углом 45° к ***oa***. Результат векторного сложения — вектор ***or***; измеряем его и получаем, что его **длина равна 10.2 единицы, а угол относительно силы 7 Н — 16°**.

На **Рис. 5.4в** проиллюстрирован *метод параллелограмма*, согласно которому от концов векторов 4 Н и 7 Н рисуем прямые параллельно силам 7 Н и 4 Н соответственно.

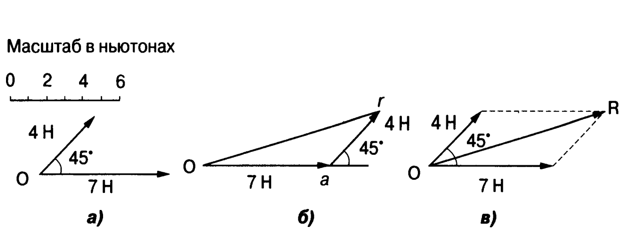


Рис. 5.4

Они пересекаются в точке R. Вектор **OR** определяет величину и направление итогового вектора. Так же как и при использовании метода треугольника, **его длина составляет 10.2 единицы, и он расположен под углом 16° к силе 7 Н**.

Пример. Использовать графический метод для определения величины и направления результата сложения трех скоростей, показанных на **Рис. 5.5**.

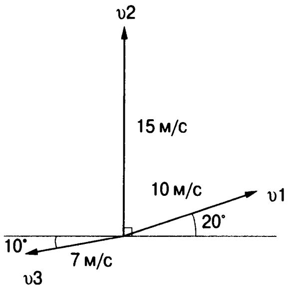


Рис. 5.5

При сложении более чем двух векторов проще использовать метод треугольника. Порядок сложения векторов неважен. В данном случае примем следующий порядок: v_1, v_2, затем v_3. Но результат будет тот же, если использовать, скажем, порядок v_1, v_3, затем v_2. Вектор v_1 рисуем длиной 10 единиц под углом 20° к горизонтали, это ***oa*** на **Рис. 5.6**.

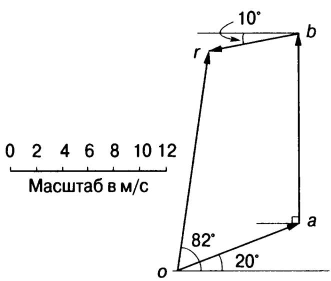


Рис. 5.6

Чтобы сложить v_2 и v_1, строим отрезок длиной 15 единиц вертикально вверх от *a* и получаем ***ab***. Затем прибавляем v_3 к $v_1 + v_2$. Для этого строим отрезок длиной 7 единиц под углом 190° от *b* и получаем ***br***. Результат векторного сложения — это ***or***, измеряем его и получаем длину 17.5 единицы и угол 82° к горизонтали.

Таким образом, $v_1 + v_2 + v_3 =$ **17.5 м/с, расположенный под углом 82° к горизонтали**.

5.1.3. Разложение векторов

Вектор можно разложить на две компоненты таким образом, чтобы при сложении этих компонент получался исходный вектор. Как правило, эти две компоненты — вертикальная и горизонтальная. Для вектора, обозначенного $\boldsymbol{F}$ на **Рис. 5.7**, горизонтальная компонента равна $F\cos\theta$, вертикальная — $F\sin\theta$.

Для векторов $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, показанных на **Рис. 5.8**, горизонтальная компонента их суммы есть

$$H = F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2,$$

вертикальная компонента есть

$$V = F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2.$$

Зная H и V, модуль результирующего вектора $\boldsymbol{R}$ можно определить как $\sqrt{H^2 + V^2}$, а его угол относительно горизонтали — как $\operatorname{arctg}\frac{V}{H}$.

Пример. Найти результат сложения трех скоростей, показанных на **Рис. 5.5**.

Горизонтальная компонента скорости есть

$$H = 10\cos 20° + 15\cos 90° + 7\cos 190° = \\ = 9.397 + 0 + (-6.894) = \mathbf{2.503\ м/с}.$$

Вертикальная компонента скорости есть

$$V = 10\sin 20° + 15\sin 90° + 7\sin 190° = \\ = 3.420 + 15 + (-1.216) = \mathbf{17.204\ м/с}.$$

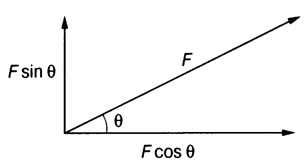


Рис. 5.7

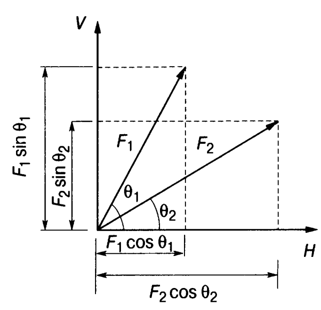


Рис. 5.8

Модуль итогового вектора равен

$$\sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{2.503^2 + 17.204^2} = \sqrt{302.24} = \mathbf{17.39\ м/с}.$$

Направление итогового вектора равно

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{V}{H}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{17.204}{2.503}\right) = \operatorname{arctg} 6.8734 = 81.72°.$$

Таким образом, результат сложения трех скоростей — вектор 17.39 м/с, расположенный под углом 81.72° к горизонтали.

5.1.4. Разность векторов

На **Рис. 5.9** сила F представлена как ***oa***. Чтобы получить вектор (***–oa***), надо построить из o вектор той же величины, но в противоположном к ***oa*** направлении. На **Рис. 5.9** это ***ob***, т. е. ***ob*** = ***–oa***.

Для двух векторов, приложенных к точке, результат векторного сложения есть ***os*** = ***oa*** + ***ob***, как показано на **Рис. 5.10а**. На **Рис. 5.10б** построены векторы ***ob*** + (***–oa***), т. е. ***ob*** – ***oa***, векторное уравнение для них имеет вид ***ob*** – ***oa*** = ***od***. Сравнивая ***od*** с **Рис. 5.10б** и пунктирную линию ab с **Рис. 5.10а**, видим, что вторая диагональ параллелограмма векторного сложения дает величину и направление результата вычитания вектора ***oa*** из вектора ***ob***.

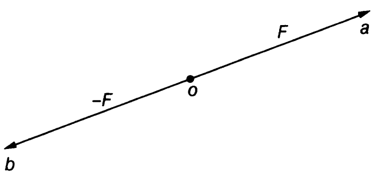
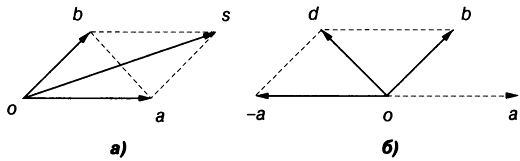


Рис. 5.9



а) **б)**

Рис. 5.10

Пример. К точке приложены ускорения: a_1 = 1.5 м/с^2 под углом 90° и a_2 = 2.6 м/с^2 под углом 145°. Найдем $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$:
а) с помощью векторной диаграммы, б) посредством вычислений.

а) Векторная диаграмма показана на **Рис. 5.11**. Согласно измерениям,

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 3.7 \text{ м/с}^2, \text{ угол } 126°,$$

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = 2.1 \text{ м/с}^2, \text{ угол } 0°.$$

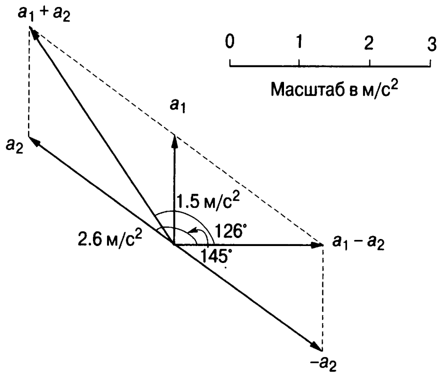


Рис. 5.11

б) Выделяем горизонтальные и вертикальные компоненты:
Горизонтальная компонента $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

$$\boldsymbol{H} = 1.5 \cos 90° + 2.6 \cos 145° = -2.13.$$

Вертикальная компонента $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

$$\boldsymbol{V} = 1.5 \sin 90° + 1.6 \sin 145° = 2.99.$$

Величина $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \sqrt{(-2.13)^2 + 2.99^2} = \mathbf{3.67\ м/с^2}$.

Направление $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2.99}{-2.13}\right)$, и вектор должен принадлежать второму квадранту, поскольку величина H отрицательна, а V — положительна.

$\operatorname{arctg}\left(\frac{2.99}{-2.13}\right) = -54.53°$, и, чтобы угол принадлежал второму квадранту, к исходному углу нужно прибавить 180°; получим 180° – 54.35° или 125.47°.

Итак, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ = 3.67 м/с^2, угол 125.47°.

Горизонтальная компонента вектора $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + (-\boldsymbol{a}_2)$ есть

$$1.5 \cos 90° + 2.6 \cos(145° - 180°) = 2.6 \cos(-35°) = 2.13.$$

Вертикальная компонента вектора $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + (-\boldsymbol{a}_2)$ есть

$$1.5 \sin 90° + 2.6 \sin(-35°) = 0.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ есть $\sqrt{2.13^2 + 0^2} = 2.13$ м/с^2.

Направление вектора $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ есть $\operatorname{arctg}\left(\frac{0}{2.13}\right) = 0°$.

Таким образом, **$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = 2.13$ м/с^2, угол 0°**.

Пример. Вычислить $v_1 - v_2 + v_3$ при $v_1 = 22$ единицы под углом 140°, $v_2 = 40$ единиц под углом 190° и $v_3 = 15$ единиц под углом 290°.

Векторы показаны на **Рис. 5.12**.

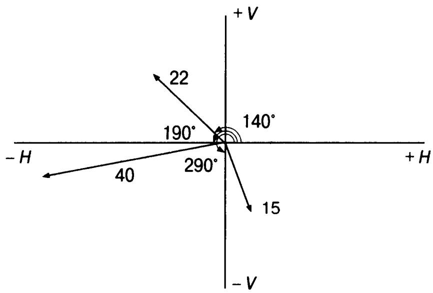


Рис. 5.12

Горизонтальная компонента $v_1 - v_2 + v_3$ равна

$$(22 \cos 140°) - (40 \cos 190°) + (15 \cos 290°) =$$
$$= (-16.85) - (-39.39) + (5.13) = \mathbf{27.67\ единицы}.$$

Вертикальная компонента вектора $v_1 - v_2 + v_3$ равна

$$(22 \sin 140°) - (40 \sin 190°) + (15 \sin 290°) =$$
$$= (14.14) - (-6.95) + (-14.10) = \mathbf{6.99\ единицы}.$$

Величину результирующего вектора $\boldsymbol{R}$, которую можно представить математическим символом «*модуль*», или $|v_1 - v_2 + v_3|$, можно найти так:

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{27.67^2 + 6.99^2} = 28.54 \text{ единицы}.$$

Направление результирующего вектора $\boldsymbol{R}$, которое можно представить математическим символом «*аргумент*», или $\arg(v_1 - v_2 + v_3)$, определяется так:

$$\mathbf{arg}\ \boldsymbol{R} = \operatorname{arctg}\left(\frac{6.99}{27.67}\right) = 14.18°.$$

Итак, $v_1 - v_2 + v_3 =$ **28.54 единицы, угол равен 14.18°**.

5.1.5. Относительная скорость

Для решения задач, связанных с относительной скоростью, необходимо выбрать фиксированные точки начала отсчета. Часто это фиксированная точка на поверхности земли. В любом векторном выражении только начальная и конечная точки влияют на результирующий вектор системы. Две различные системы показаны на **Рис. 5.13**, но в обеих системах результирующий вектор равен ***ad***.

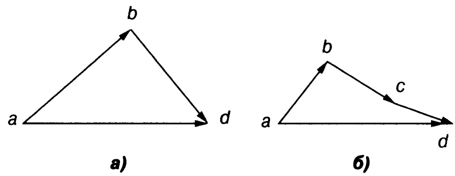


Рис. 5.13

Векторное уравнение системы, показанной на **Рис. 5.13а**, — это

$$\boldsymbol{ad} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bd},$$

а векторное уравнение системы, показанной на **Рис. 5.13б**, — это

$$\boldsymbol{ad} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{cd}.$$

Таким образом, в векторных уравнениях только первая и последняя буквы — в данном случае это a и d соответственно — определяют величину и направление результирующего вектора.

Пример. Две машины — P и Q движутся к перекрестку двух дорог, расположенных под прямым углом одна к другой. Машина P движется на восток со скоростью 45 км/ч, машина Q — на юг со скоростью 55 км/ч. Вычислить: а) скорость машины P относительно машины Q, б) скорость машины Q относительно машины P.

а) Направления движения машин показаны на **Рис. 5.14а**, называемом *пространственная диаграмма*. Диаграмма скоростей приведена на **Рис. 5.14б**, где ***pe*** — скорость машины P относительно точки e на поверхности земли. Скорость P относительно Q — это вектор ***pq***, а векторное уравнение имеет вид ***pq*** = ***pe*** + ***eq***. Следовательно, направления векторов такие, как показано на рисунке; вектор ***eq*** имеет противоположное к ***qe*** направление. Из геометрии векторного треугольника находим:

$$|\boldsymbol{pq}| = \sqrt{45^2 + 55^2} = 71.06 \text{ км/ч}$$

и

$$\arg \boldsymbol{pq} = \operatorname{arctg}\left(\frac{55}{45}\right) = 50.71°.$$

То есть **скорость машины P относительно машины Q составляет 71.06 км/ч и направлена под углом 50.71°**.

б) Скорость машины Q относительно машины P задается векторным уравнением $\boldsymbol{qp} = \boldsymbol{qe} + \boldsymbol{ep}$, векторная диаграмма показана на **Рис.5.14в**, направление $\boldsymbol{ep}$ противоположно $\boldsymbol{pe}$. Из геометрии данного векторного треугольника находим:

$$|\boldsymbol{qp}| = \sqrt{45^2 + 55^2} = 71.06 \text{ м/с},$$

$$\arg(\boldsymbol{qp}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{55}{45}\right) = 50.71°.$$

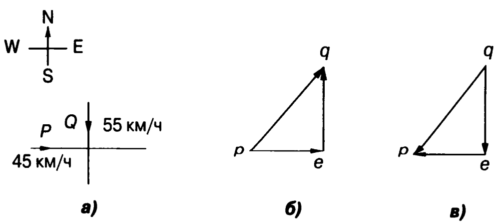


Рис. 5.14

Вектор должен принадлежать третьему квадранту, следовательно, искомый угол равен

$$180° + 50.71° = 230.71°.$$

Таким образом, **скорость машины Q относительно машины P составляет 71.06 м/с и направлена под углом 230.71°**.

5.2. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

5.2.1. Сложение двух гармонических функций

В науке и инженерном деле в некоторых случаях колебания складываются, и требуется определить общий фазовый вектор (называемый *равнодействующей*), которым можно заменить два или более отдельных фазовых вектора. (Фазовый вектор — это вращающийся вектор.) Такие задачи встречаются в теории переменного тока, теории механических колебаний, при сложении сил и звуковых волн. Есть несколько способов определения равнодействующей, и в данной главе рассматриваются два из них: построение с последующим измерением и разложение векторов посредством вычисления.

5.2.2. Построение гармонических функций

Его можно осуществить, построив эти функции в одних осях с последующим сложением (вычитанием) ординат через определенные интервалы.

Пример. Построить в общих осях графики функций $y_1 = 3 \sin A$ и $y_2 = 2 \cos A$ в диапазоне от 0° до 360°. Для этого построим $y_R = 3 \sin A + 2 \cos A$, сложив ординаты, и составим синусоидальное уравнение равнодействующего сигнала.

Графики функций $y_1 = 3 \sin A$ и $y_2 = 2 \cos A$ показаны на **Рис. 5.15**. Ординаты можно складывать через различные интервалы.

Например:

При 0° имеем $y_1 + y_2 = 0 + 2 = 2$.

При 15° имеем $y_1 + y_2 = 0.78 + 1.93 = 2.71$.

При 120° имеем $y_1 + y_2 = 2.60 + (-1) = 1.6$.

При 210° имеем $y_1 + y_2 = -1.50 - 1.73 = -3.23$ и т. д.

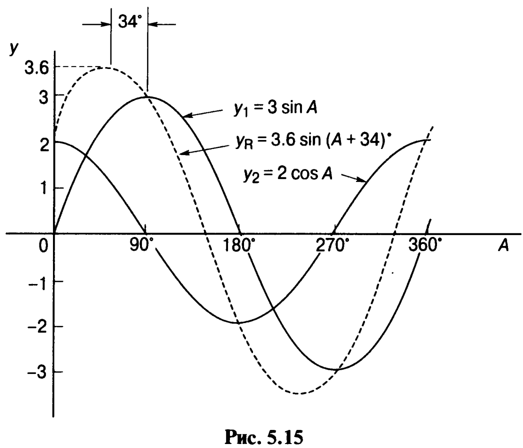


Рис. 5.15

Результирующий сигнал, показанный пунктирной линией, имеет тот же период, т. е. 360°, и ту же частоту, что суммируемые фазовые векторы. Максимальная величина или амплитуда результирующего вектора составляет 3.6. Результирующий сигнал ***опережает*** $y_1 = 3 \sin A$ на 34° или на 0.539 рад. Синусоидальное уравнение результирующего сигнала есть

$$y_R = 3.6 \sin(A + 34°), \text{ или } y_R = 3.6 \sin(A + 0.539).$$

Пример. Построить в общих осях графики $y_1 = 4 \sin \omega t$ и $y_2 = 3 \sin(\omega t - \pi/3)$ на одном периоде. Складывая ординаты через определенные интервалы, построить $y_R = y_1 + y_2$. Получить уравнение результирующего сигнала.

Графики $y_1 = 4 \sin \omega t$ и $y_2 = 3 \sin(\omega t - \pi/3)$ построены на **Рис. 5.16**. Ординаты складывались с шагом 15°, результирующий сигнал показан пунктирной линией. Амплитуда результирующего сигнала равна 6.1, он ***запаздывает*** относительно y_1 на 25° или 0.436 рад. Следовательно, синусоидальное выражение, описывающее результирующий сигнал, есть

$$y_R = 6.1 \sin(\omega t - 0.436).$$

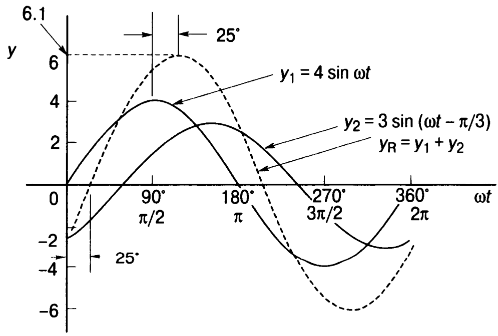


Рис. 5.16

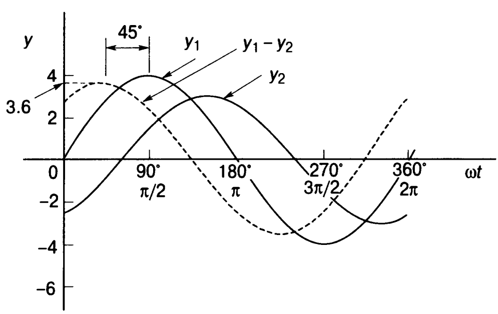


Рис. 5.17

Пример. Найти синусоидальное выражение для $y_1 - y_2$ при $y_1 = 4 \sin \omega t$ и $y_2 = 2 \sin(\omega t - \pi/3)$.

Графики y_1 и y_2 показаны на **Рис. 5.17**. Через интервал 15° y_2 вычитается из y_1. Например:

При 0° имеем $y_1 - y_2 = 0 - (-2.6) = +2.6$.

При 30° имеем $y_1 - y_2 = 2 - (-1.5) = +3.5$.

При 150° имеем $y_1 - y_2 = 2 - 3 = -1$ и т. д.

Амплитуда, или пиковое значение результирующего сигнала (показан штриховой линией), равна 3.6, он опережает y_1 на 45° или 0.79 рад. Следовательно,

$$y_1 - y_2 = 3.6 \sin(\omega t + 0.79).$$

5.2.3. Отыскание фазовых векторов посредством вычисления

Результирующий вектор двух периодических функций можно найти по их относительному положению в нулевой момент времени. Например, если $y_1 = 4 \sin \omega t$ и $y_2 = 3 \sin(\omega t - \pi/3)$, каждый из них может быть представлен в виде фазового вектора. Это проиллюстрировано на **Рис. 5.18**. Вектор y_1 имеет длину 4 единицы, y_2 — длину 3 единицы и запаздывает относительно y_1 на $\pi/3$ радиан или 60°. Найдем результирующий вектор $y_1 + y_2$. Вектор y_1 расположен горизонтально, как показано на **Рис. 5.19**, а y_2 присоединен к концу y_1 под углом 60° к горизонтали. Результирующий вектор обозначен y_R. Это диагональ параллелограмма, показанного на **Рис. 5.20**. Результирующий вектор y_R на **Рис. 5.19** и **5.20** можно найти одним из следующих способов:

1. Применить теорему косинусов (с последующим использованием теоремы синусов для нахождения угла ϕ).

2. Найти горизонтальную и вертикальную компоненты длиной *oa* и *ab* с **Рис. 5.19**, а затем использовать теорему Пифагора для вычисления *ob*.

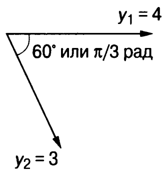


Рис. 5.18

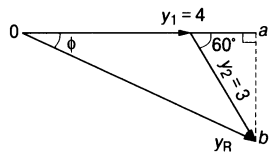


Рис. 5.19

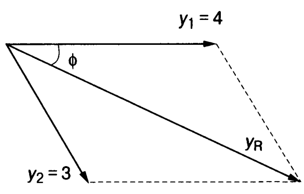


Рис. 5.20

В рассмотренном выше примере в результате вычислений получены значения $y_R = 6.083$, а угол $\phi = 25.28°$, или 0.441 радиан. Таким образом, результирующий вектор может быть выражен в виде $y_R = 6.083 \sin(\omega t - 0.441)$. Если необходимо найти результирующий фазовый вектор $y_R = y_1 - y_2$, тогда y_2 длиной 3 единицы откладывается в противоположном направлении, как показано на **Рис. 5.21**, и y_R находится в результате вычислений.

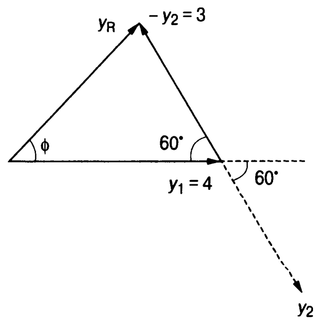


Рис. 5.21

Пример. При $y_1 = 2 \sin \omega t$ и $y_2 = 3 \sin(\omega t + \pi/4)$ получить выражение результирующего вектора $y_R = y_1 + y_2$: а) посредством построения, б) посредством вычислений.

а) Положение фазовых векторов y_1 и y_2 в момент времени $t = 0$ показано на **Рис. 5.22а**. Чтобы найти результирующий вектор, y_1 длиной 2 единицы нарисован горизонтально, а y_2 длиной 3 единицы присоединен к концу y_1 под углом $\pi/4$ или 45°, как показано на **Рис. 5.22б**. При измерении длина y_R составляет 4.6 единицы, а угол $\phi = 27°$ или 0.47 радиан. Или же y_R — это диагональ параллелограмма, построенного на **Рис. 5.22в**. Итак, по построению, $\mathbf{y_R = 4.6 \sin(\omega t + 0.47)}$.

б) Из **Рис. 5.22б** по теореме косинусов получаем

$$y_R^2 = 2^2 + 3^2 - [2(2)(3)\cos 135°] = 4 + 9 - [-8.485] = 21.49 .$$

Следовательно, $y_R = \sqrt{21.49} = 4.64$.

Согласно теореме синусов, $\dfrac{3}{\sin\phi} = \dfrac{4.64}{\sin 135°}$,

откуда $\sin\phi = \dfrac{3\sin 135°}{4.64} = 0.4572$.

Следовательно, $\phi = \arcsin 0.4572 = 27.21°$, или 0.475 рад.
Согласно вычислениям, $\mathbf{y_R = 4.64 \sin(\omega t + 0.475)}$.

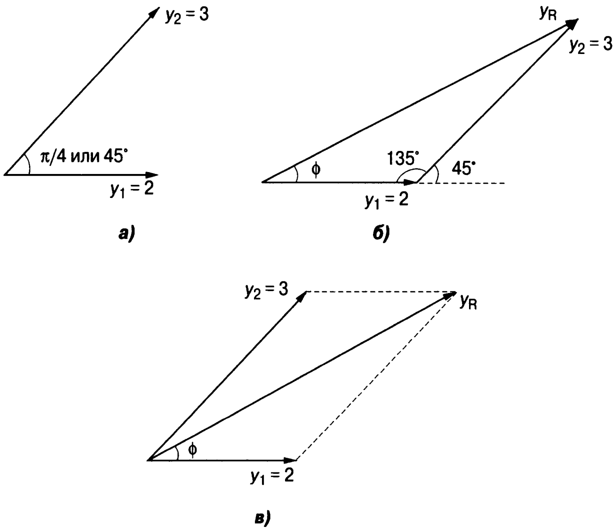


Рис. 5.22

5.3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

5.3.1. Тройка единичных векторов

Если вектор $\boldsymbol{x}$ длиной x единиц с направлением θ° разделить на его длину, в результате получится вектор единичной длины с направлением θ°. Единичный вектор для скорости 10 м/с под углом 50° равен $\dfrac{10 \text{ м/с при } 50°}{10 \text{ м/с}}$, т. е. 1 под углом 50°. В общем виде единичный вектор для вектора $\boldsymbol{oa}$ можно записать как $\dfrac{\boldsymbol{oa}}{|\boldsymbol{oa}|}$, где $\boldsymbol{oa}$ — вектор, имеющий направление и длину, $|\boldsymbol{oa}|$ — это только длина вектора.

Один из способов полного определения направления в пространстве относительно некоторой опорной точки — использование трех единичных векторов, расположенных под прямыми углами друг относительно друга, как показано на **Рис. 5.23**. Подобная система называется *тройка единичных векторов*. Один из способов попасть из o в r, привязанных на **Рис. 5.24**, — это переместиться на x единиц вдоль $\boldsymbol{i}$ в точку a, на y единиц в направлении $\boldsymbol{j}$ до b и на z единиц в направлении $\boldsymbol{k}$ до r.

Вектор $\boldsymbol{or}$ определяется как

$$\boldsymbol{or} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

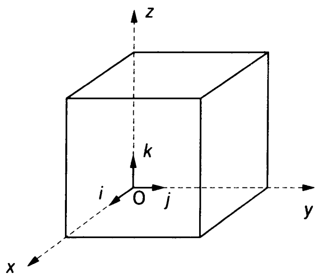


Рис. 5.23

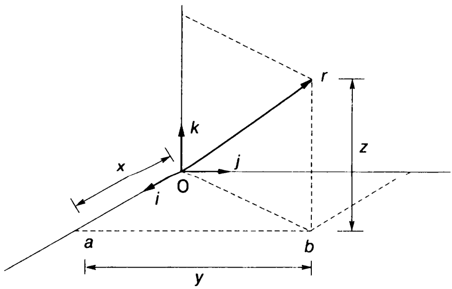


Рис. 5.24

5.3.2. Скалярное произведение двух векторов

Если вектор ***oa*** умножается на скалярную величину, скажем, k, длина результирующего вектора будет в k раз больше длины ***oa***, а направление останется прежним. Таким образом, 2 × (5 Н при 20°) дает вектор длиной 10 Н под углом 20°.

Одна из величин, получаемых перемножением двух векторов, называется скалярным произведением и находится умножением их длин друг на друга и на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов ***oa*** и ***ob*** обозначается $\boldsymbol{oa} \cdot \boldsymbol{ob}$. Для вектора ***oa***, длиной oa, расположенного под углом θ_1, и вектора ***ob***, длиной ob, расположенного под углом θ_2, где $\theta_2 > \theta_1$, скалярное произведение определяется так

$$\boxed{\boldsymbol{oa} \cdot \boldsymbol{ob} = oa\, ob \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Можно показать, что $\boldsymbol{oa} \cdot \boldsymbol{ob} = \boldsymbol{ob} \cdot \boldsymbol{oa}$.

Угол между двумя векторами может быть выражен через векторные константы следующим образом.

Поскольку $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$, то

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a \cdot b}{ab}} \qquad (1)$$

Пусть $a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$;

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}).$$

Раскрываем скобки:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + a_2b_1\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + \\ + a_2b_3\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + a_3b_2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}.$$

Все единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ имеют величину 1 и $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = (1)(1)\cos 90° = 0$, аналогично $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ и $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$. Таким образом, ненулевыми будут только члены выражения, содержащие $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}$.

Итак, результат скалярного умножения двух векторов

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \qquad (2)$$

И a, и b в выражении (1) можно выразить через a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 и b_3.

Из **Рис. 5.25** — длина диагонали OP, выраженная по теореме Пифагора через длины ребер a, b и c, равна

$$OP^2 = OB^2 + BP^2 \text{ и } OB^2 = OA^2 + AB^2.$$

Таким образом, $OP^2 = OA^2 + AB^2 + BP^2 = a^2 + b^2 + c^2$, выраженная через длины ребер.

Итак, *длина* или *модуль,* или *величина,* или *норма вектора* **OP** определяется следующей формулой:

$$\boxed{OP = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \qquad (3)$$

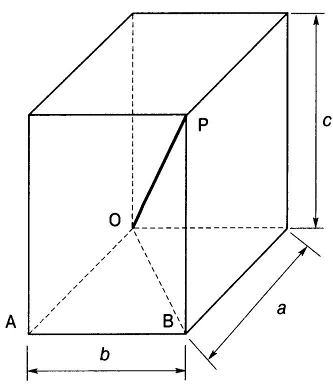


Рис. 5.25

Выразим результат через два вектора $a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$:

$$a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \text{ и } b = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}\,.$$

Тогда из уравнения (1)

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}} \qquad (4)$$

Пример. Найти: а) $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, б) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, в) $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}|$, г) $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}|$, если $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

а) Из уравнения (2), если $\boldsymbol{p} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{q} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, то $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
Если $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $a_3 = -1$,
и если $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $b_1 = 1$, $b_2 = -3$ и $b_3 = 2$,
то $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = (2)(1) + (1)(-3) + (-1)(2)$, т. е. $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \mathbf{-3}$.

б) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = \mathbf{3}\boldsymbol{i} - \mathbf{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

в) $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}| = |3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}|$.

Из уравнения (3), $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{14}}$.

г) Из уравнения (3), $|\boldsymbol{p}| = |2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}| = \sqrt{[2^2 + 1^2 + (-1)^2]} = \sqrt{6}$.

Аналогично $|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}| = \sqrt{[1^2 + (-3)^2 + 2^2]} = \sqrt{14}$.

Следовательно, $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}| = \sqrt{6} + \sqrt{14} = \mathbf{6.191}$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Пример. Найти угол между векторами $\boldsymbol{oa}$ и $\boldsymbol{ob}$, если $\boldsymbol{oa} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{ob} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

Из уравнения (4), $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$.

Поскольку $\boldsymbol{oa} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, то $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_3 = -3$.
Поскольку $\boldsymbol{ob} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, то $b_1 = 2$, $b_2 = -1$ и $b_3 = 4$. Итак,

$$\cos\theta = \frac{(1 \times 2) + (2 \times -1) + (-3 \times 4)}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + (-3)^2)}\sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 4^2)}} =$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0.6999,$$

т. е. $\theta = 134.4°$ или $225.6°$.

Если нарисовать положения двух векторов, будет видно, что 225.6° — неприемлемый ответ. Таким образом, угол между векторами $\boldsymbol{oa}$ и $\boldsymbol{ob}$, θ = **134.4°**.

5.3.3. Направляющие косинусы

Из **Рис. 5.24** $\boldsymbol{or} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, и из уравнения (3)

$$|\boldsymbol{or}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если $\boldsymbol{or}$ составляет углы α, β и γ с осями $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{и}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

При этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\boldsymbol{or}$.

5.3.4. Практические применения скалярного произведения

Пример. Постоянная сила $\boldsymbol{F} = 10\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ньютон перемещает объект из точки $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ в точку $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ (в метрах). Найти совершенную работу в ньютонах на метр.

Совершенная работа — это произведение приложенной силы на расстояние, пройденное в направлении действия силы, т. е.

$$\textbf{совершенная работа} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}.$$

Принципы, рассмотренные в последнем примере разд. 5.2, непосредственно применяются в данном случае для определения перемещения. Из диаграммы, показанной на **Рис. 5.26**,

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AO} + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA},$$

т. е.

$$\boldsymbol{AB} = (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Совершенная работа — это $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}$, что в данном случае равно $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{AB}$.

То есть **совершенная работа** равна $(10\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$.

Но, согласно уравнению (2), $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Следовательно, **совершенная работа** равна $(10 \times 1) + (2 \times (-2)) + ((-1) \times 2) =$ **4 Н·м**.

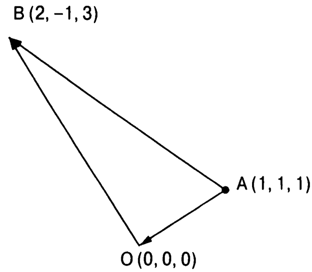


Рис. 5.26

5.3.5. Векторное произведение

Второе произведение двух векторов называется ***векторным произведением*** и определяется длинами этих двух векторов и синусом угла между ними. Векторное произведение векторов ***oa*** и ***ob*** записывается как ***oa*** × ***ob*** и находится по формуле

$$\boxed{|\boldsymbol{oa} \times \boldsymbol{ob}| = oa\ ob \sin\theta}$$

где θ — угол между двумя векторами.

Направление ***oa*** × ***ob*** перпендикулярно и ***oa***, и ***ob***, что показано на **Рис. 5.27**.

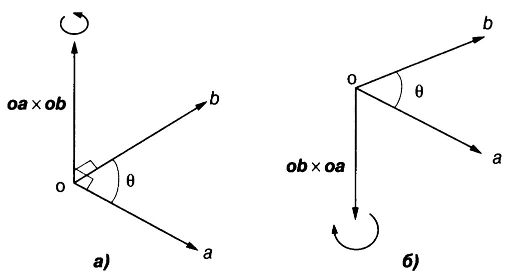


Рис. 5.27

Направление итогового вектора определяется следующим образом: представим, что правый винт с головкой в начале координат вкручивается вдоль ***oa*** × ***ob***, и, если направление ***oa*** × ***ob*** верное, головка будет вращаться от ***oa*** к ***ob***, как показано на **Рис. 5.27а**. Отсюда следует, что направление ***ob*** × ***oa*** таково, как на **Рис. 5.27б**. Значит, ***oa*** × ***ob*** не равняется ***ob*** × ***oa***. Величины произведений *oa ob* sin θ одинаковы, но направления повернуты относительно друг друга на 180°, т. е.

$$\boldsymbol{oa} \times \boldsymbol{ob} = -\,\boldsymbol{ob} \times \boldsymbol{oa}.$$

Результат векторного произведения двух векторов можно выразить через единичные векторы. Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ таковы, что

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}; \;\; \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \times (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = \\ &= a_1b_1\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} + a_2b_1\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + \\ &+ a_2b_2\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + a_2b_3\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + \\ &+ a_3b_2\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Согласно определению векторного умножения,

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \;\; \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \;\; \text{и} \;\; \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Также $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = (1)(1)\sin 0° = 0$.
Вспомним, что $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, тогда

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} + a_2b_3\boldsymbol{i} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i}.$$

Группируем члены с $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

Векторное произведение можно записать в виде детерминанта:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

3×3 детерминант $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

где $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_3b_1$ и

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Величину векторного произведения двух векторов можно найти, выразив его через скалярное произведение, а затем использовать соотношение

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Возводим обе части уравнения векторного произведения в квадрат:

$$(|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|)^2 = a^2 b^2 \sin^2\theta = a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta) =$$
$$= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos\theta. \qquad (6)$$

Ранее было установлено, что $a \cdot b = ab \cos\theta$, следовательно,

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2 \cos\theta$, но $\theta = 0°$; таким образом, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$. Кроме того,

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{ab}.$$

Умножаем обе части данного уравнения на ab и возводим его в квадрат:

$$a^2 b^2 \cos^2\theta = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2.$$

Подставляем в уравнение (6) $a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$, $b^2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}$ и $a^2 b^2 \cos^2\theta = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$:

$$(|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|)^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2.$$

Значит,

$$\boxed{(|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|) = \sqrt{[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2]}} \qquad (7)$$

Пример. Найти: а) $a \times b$ и б) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ для векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

Согласно уравнению (5):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= \boldsymbol{i}(12 - 2) - \boldsymbol{j}(3 + 4) + \boldsymbol{k}(-1 - 8) =$$
$$= \mathbf{10}\boldsymbol{i} - \mathbf{7}\boldsymbol{j} - \mathbf{9}\boldsymbol{k}.$$

Согласно уравнению (7), $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2]}$.

Теперь:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (1)(1) + (4 \times 4) + (-2)(-2) = 21,$$
$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = (2)(2) + (-1)(-1) + (3)(3) = 14,$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (1)(2) + (4)(-1) + (-2)(3) = -8.$$

Итак, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(21\times 14 - 64)} = \sqrt{230} = \mathbf{15.17}$.

5.3.6. Практическое применение векторного произведения

Пример. Найти момент и величину момента силы $(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$ ньютон относительно точки B с координатами (0, 1, 1), если эта сила действует вдоль прямой, проходящей через точку A с координатами (1, 3, 4).

Момент $\boldsymbol{M}$ в точке B силы $\boldsymbol{F}$, положение которой относительно точки A задается вектором $\boldsymbol{r}$, определяется как $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{r}$ — это вектор из точки B к точке A, т. е. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{BA}$.

Но $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BO} + \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OA} - \boldsymbol{OB}$; значит, $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

Момент вычислим следующим образом:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(-6-6) - \boldsymbol{j}(-3-3) + \boldsymbol{k}(2-2) =$$

$$= \mathbf{-12\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\ Н{\cdot}м}.$$

Величина $\boldsymbol{M}$, $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}| = \sqrt{|(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}) - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F})^2|}$.

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = (1)(1) + (2)(2) + (3)(3) = 14,$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} = (1)(1) + (2)(2) + (-3)(-3) = 14,$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} = (1)(1) + (2)(2) + (3)(-3) = -4.$$

$$|\boldsymbol{M}| = \sqrt{|14\times 14 - (-4)^2|} = \sqrt{180}\ Н{\cdot}м = \mathbf{13.42\ Н{\cdot}м}.$$

Глава 6

Комплексные числа

6.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

6.1.1. Комплексные числа в декартовой системе координат

Если решить уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$ с использованием формулы корней квадратного уравнения, мы получим

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{[(12)^2 - (4)(1)(5)]}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{[-16]}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{[(-16)(-1)]}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

В действительных числах определить значение $\sqrt{-1}$ невозможно. Однако если задать оператор j формулой $j = \sqrt{-1}$, то можно найти решение этого уравнения в виде $x = -1 \pm j2$.

$-1 + j2$ и $-1 - j2$ известны как *комплексные числа*. Оба решения имеют вид $a + jb$, где a — *действительная часть*, а jb — *мнимая часть*. Комплексное число вида $a + jb$ называется ***комплексным числом в декартовой системе координат.***

Поскольку $\quad j = \sqrt{-1}$, то $j^2 = -1$,

$$j^3 = j^2 \times j = (-1) \times j = -j,$$
$$j^4 = j^2 \times j^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

и

$$j^{23} = j \times j^{22} = j \times (j^2)^{11} = j \times (-1)^1 = j \times (-1) = -j.$$

В чистой математике для обозначения $\sqrt{-1}$ используется символ i (это первая буква английского слова imaginary — мнимый). Однако i — это также обозначение электрического тока в инженерных науках, и во избежание путаницы для представления $\sqrt{-1}$ используется следующая буква алфавита, j.

Пример. Квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 5 = 0$ решается следующим образом:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{[(3)^2 - 4(2)(5)]}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{31}}{4} = \frac{-3 \pm j\sqrt{31}}{4}.$$

Следовательно, $x = -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{31}}{4}$, или $\mathbf{-0.750 \pm j1.392}$, с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

(Отметим, что график $y = x^2 + 2x + 5$ не пересекает ось x, следовательно, уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.)

6.1.2. Комплексная плоскость

Комплексное число можно графически представить в прямоугольной системе координат. Горизонтальная ось (ось x) используется для представления действительной части, а вертикальная (ось y) — для представления мнимой части. Таким образом, любое комплексное число можно отобразить в виде точки *комплексной плоскости*. На **Рис. 6.1** точка A представляет комплексное число $(3 + j2)$ и имеет координаты $(3, j2)$ на графике. На **Рис. 6.1** также показаны точки B, C и D, представляющие комплексные числа $(-2 + j4)$, $(-3 - j5)$ и $(1 - j3)$ соответственно.

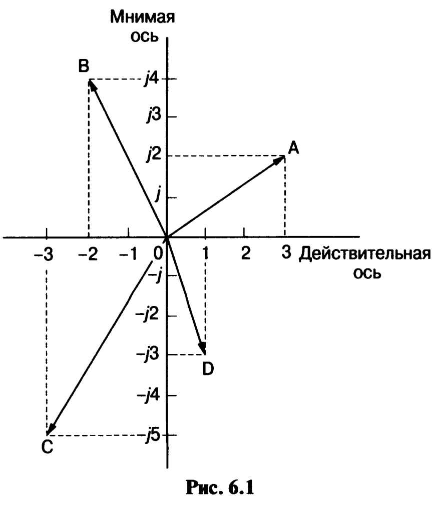


Рис. 6.1

6.1.3. Сложение и вычитание комплексных чисел

Два комплексных числа складываются/вычитаются посредством раздельного сложения/вычитания двух их действительных и двух мнимых частей.

Пример.
Если $Z_1 = a + jb$ и $Z_2 = c + jd$, то

$$Z_1 + Z_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

и

$$Z_1 - Z_2 = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) - j(b - d).$$

Пример.

$$(2 + j3) + (3 - j4) = 2 + j3 + 3 - j4 = \mathbf{5 - j1}$$

и

$$(2 + j3) - (3 - j4) = 2 + j3 - 3 + j4 = \mathbf{-1 + j7}.$$

6.1.4. Умножение и деление комплексных чисел

Чтобы ***перемножить комплексные числа***, необходимо перемножить все величины в мнимой и действительной частях, как будто они действительные, а затем упростить, используя выражение $j^2 = -1$.

Следовательно, $(a + jb)(c + jd) = ac + a(jd) + (jb)c + (jb)(jd) = ac + jad + jbc + j^2bd = (ac - bd) + j(ad + bc)$, поскольку $j^2 = -1$.

Пример.

$$\begin{aligned}(3 + j2)(4 - j5) &= 12 - j15 + j8 - j^2 10 = \\ &= (12 - (-10)) + j(-15 + 8) = \\ &= \mathbf{22 - j7}.\end{aligned}$$

Комплексно-сопряженное для комплексного числа получают, изменив знак перед мнимой частью. Следовательно, комплексно-сопряженное для $(a + jb)$ — это $(a - jb)$. Произведение двух комплексно-сопряженных всегда равно действительному числу.

Например: $(3 + j4)(3 - j4) = 9 - j12 + j12 - j^2 16 = 9 + 16 = 25$.
(Значение $(a + jb)(a - jb)$ «на глаз» можно оценить как $a^2 + b^2$.)

Деление комплексных чисел осуществляют, умножая числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное к знаменателю.

Пример.

$$\frac{2 - j5}{3 + j4} = \frac{2 - j5}{3 + j4} \times \frac{(3 - j4)}{(3 - j4)} = \frac{6 - j8 - j15 + j^2 20}{3^2 + 4^2} =$$

$$= \frac{-14 - j23}{25} = \frac{\mathbf{-14}}{\mathbf{25}} - j\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{25}} = \mathbf{-0.56 - j0.92}\,.$$

6.1.5. Комплексные уравнения

Если два комплексных числа равны, то их действительные части равны и их мнимые части равны. Следовательно, если $a + jb = c + jd$, то $a = c$ и $b = d$.

Пример. Решить комплексное уравнение $(1 + j2)(-2 - j3) = a + jb$.

$$(1 + j2)(-2 - j3) = a + jb,$$
$$-2 - j3 - j4 - j^2 6 = a + jb.$$

Следовательно, $4 - j7 = a + jb$.

Приравнивая действительную и мнимую части, получаем $\boldsymbol{a = 4}$ и $\boldsymbol{b = -7}$.

6.1.6. Полярная форма записи комплексных чисел

Пусть комплексное число Z равно $x + jy$, как показано на **Рис. 6.2**.

Пусть расстояние OZ равно r, и угол, который OZ составляет с положительным направлением действительной оси, равен θ.

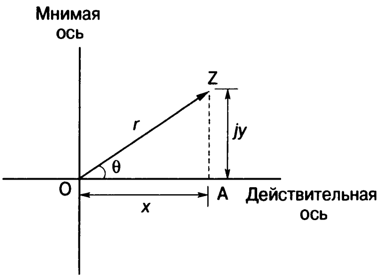


Рис. 6.2

Из определения тригонометрических функций: $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$.

Следовательно, $Z = x + jy = r\cos\theta + r\sin\theta = r(\cos\theta + \sin\theta)$.

$Z = r(\cos\theta + \sin\theta)$ обычно сокращают до $r\angle\theta$, это *полярная форма* записи комплексного числа.

r называется *модулем* Z и записывается как mod Z или $|Z|$.

r определяют по теореме Пифагора из треугольника OAZ с **Рис. 6.2**, т. е.

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

θ называется *аргументом* Z и записывается как arg Z.

Из треугольника OAZ находим arg $Z = \boxed{\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$

При переходе от декартовой формы записи к полярной или наоборот очень важно построить диаграмму, чтобы определить, какому квадранту принадлежит комплексное число.

Пример. Выразить: а) $3 + j4$ и б) $-3 + j4$ в полярной форме.

а) Число $3 + j4$ показано на **Рис. 6.3**, оно лежит в первом квадранте.

Модуль $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, а аргумент $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} = 53.13° =$

$= 53°8'$. Следовательно, $\mathbf{3 + j4 = 5\angle 53.13°}$.

б) Число $-3 + j4$ лежит во втором квадранте.

Модуль $r = 5$, угол $\alpha = 53.13°$ из вычислений в п. а).

Аргумент $\theta = 180° - 53.13° = 126.87°$ (т. е. аргумент нужно измерять относительно положительного направления действительной оси).

Следовательно, $\mathbf{-3 + j4 = 5\angle 126.87°}$.

Аналогично можно показать, что $\mathbf{(-3 - j4) = 5\angle 233.13°}$ или $\mathbf{5\angle -126.87°}$ (принято использовать *главное значение,* т. е. численно наименьшее, чтобы выполнялось условие $-\pi < \theta < \pi$) и $\mathbf{(3 - j4) = 5\angle -53.13°}$.

Пример. Выразить $7\angle -145°$ в виде $a + jb$.

Число $7\angle -145°$ показано на **Рис. 6.4** и лежит в третьем квадранте.

$$7\angle -145° = 7\cos(-145°) + j7\sin(-145°) = \mathbf{-5.734 - j4.015}.$$

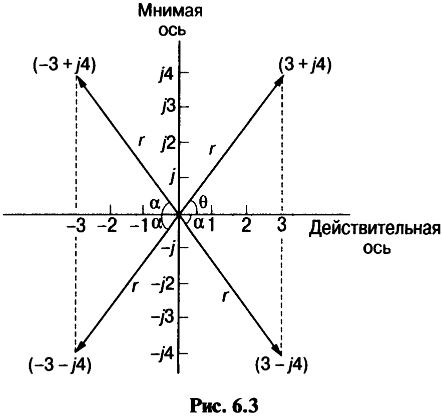


Рис. 6.3

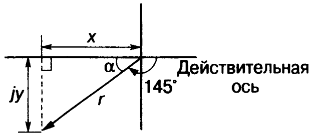


Рис. 6.4

6.1.7. Умножение и деление в полярной форме

Если $Z_1 = r_1\angle\theta_1$ и $Z_2 = r_2\angle\theta_2$, то

$$Z_1Z_2 = r_1r_2\angle(\theta_1+\theta_2) \text{ и } \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2).$$

Пример.

$$3\angle16^\circ \times 5\angle-44^\circ \times 2\angle80^\circ = (3\times5\times2)\angle[16^\circ + (-44^\circ) + 80^\circ] = \\ = \mathbf{30\angle52^\circ}.$$

Пример. $\dfrac{16\angle75^\circ}{2\angle15^\circ} = \dfrac{16}{2}\angle(75^\circ - 15^\circ) = \mathbf{8\angle60^\circ}.$

Пример. Вычислить в полярной форме $2\angle30^\circ + 5\angle-45^\circ - 4\angle120^\circ$. Вычислим поочередно

$$2\angle30^\circ = 2(\cos30^\circ + j\sin30^\circ) = 2\cos30^\circ + j2\sin30^\circ = \\ = 1.732 + j1.000;$$

$$5\angle-45^\circ = 2(\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)) = \\ = 5\cos(-45^\circ) + j5\sin(-45^\circ) = 3.536 - j3.536;$$

$$4\angle120^\circ = 4(\cos120^\circ + j\sin120^\circ) = 4\cos120^\circ + j4\sin120^\circ = \\ = -2.000 + j3.464.$$

Следовательно,

$$2\angle30^\circ + 5\angle-45^\circ - 4\angle120^\circ = (1.732 + j1.000 + (5.536 - j3.536)) - \\ - (-2.000 + j3.464) = \\ = 7.268 - j6.000.$$

Полученное число принадлежит четвертому квадранту; значит,

$$7.268 - j6.000 = \sqrt{7.268^2 + 6.000^2}\angle\mathrm{arctg}\left(\frac{-6.000}{7.268}\right) = \\ = \mathbf{9.425\angle-39.54^\circ}.$$

6.1.8. Применение комплексных чисел

Существует несколько применений комплексных чисел в науке и технике, в частности в теории переменного тока и при векторном анализе в механике.

Результат умножения фазового вектора на j — его поворот в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) в комплексной плоскости на 90° без изменения его длины. Аналогично при умножении фазового вектора на $-j$ он поворачивается на −90°. Эти свойства используются в теории переменного тока, поскольку некоторые величины на фазовых диаграммах лежат под углом 90° друг к другу. Например, в последовательном RL-контуре, показанном на **Рис. 6.5а**, V_L опережает I на 90° (т. е. I запаздывает относительно V_L на 90°) и может быть записан как jV_L, вертикальная ось считается мнимой осью комплексной плоскости. Таким образом, $V_R + jV_L = V$, и поскольку $V_R = IR$, $V = IX_L$ (где X_L — индуктивное сопротивление, $2\pi fL$ Ом), а $V = IZ$ (где Z — полное сопротивление), то $R + jX_L = Z$.

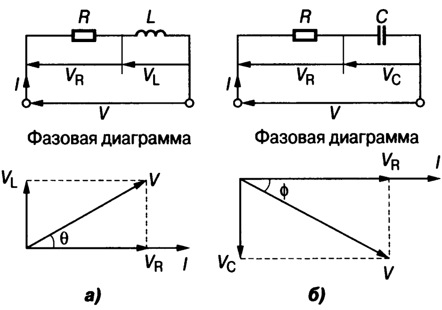


Рис. 6.5

Например, $Z = (4 + j7)$ Ом представляет полное сопротивление, состоящее из последовательно соединенных омического сопротивления величиной 4 Ом и катушки индуктивности с индуктивным сопротивлением 7 Ом. Аналогично для RC-контура, показанного на **Рис. 6.5б**, V_C запаздывает на 90° относительно I (т. е. I опережает V_C на 90°), и $V_R - jV_C = V$, откуда $R - jX_C = Z$ (где X_C — емкостное сопротивление величиной $\frac{1}{2\pi fC}$ Ом).

Например, $Z = (5 - j3)$ Ом представляет полное сопротивление, состоящее из последовательно соединенных омического сопротивления величиной 5 Ом и емкостного сопротивления величиной 3 Ом.

Пример. Найти величину тока I и его фазовый сдвиг относительно источника переменного напряжения 240 В для контура с тремя параллельными ветвями, изображенного на **Рис. 6.6**.

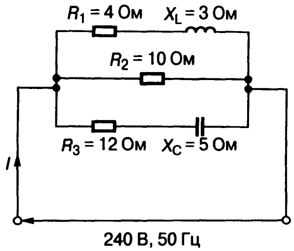


Рис. 6.6

Ток $I = \dfrac{V}{Z}$. Полное сопротивление Z контура с тремя параллельными ветвями определяется из уравнения $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}$,

где $Z_1 = 4 + j3$, $Z_2 = 10$ и $Z_3 = 12 - j5$.

Полная проводимость $Y_1 = \dfrac{1}{Z_1} = \dfrac{1}{4+j3} = \dfrac{1}{4+j3} \times \dfrac{4-j3}{4-j3} =$

$= \dfrac{4-j3}{4^2+3^2} = 0.160 - j0.120$ сименс.

Полная проводимость $Y_2 = \dfrac{1}{Z_2} = \dfrac{1}{10} = 0.10$ сименс.

Полная проводимость $Y_3 = \dfrac{1}{Z_3} = \dfrac{1}{12-j5} = \dfrac{1}{12-j5} \times \dfrac{12+j5}{12+j5} =$

$= \dfrac{12+j5}{12^2+5^2} = 0.0710 + j0.0296$ сименс.

Общая проводимость $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 =$
$= (0.160 - j0.120) + (0.10) + (0.0710 + j0.0296) =$
$= 0.331 - j0.0904 = 0.343\angle{-15.28°}$ сименс.

Ток $I = \dfrac{V}{Z} = VY = (240\angle 0°)(0.343\angle{-15.28°}) = \mathbf{82.32\angle{-15.28°}A}$.

Пример. Найти величину и направление результирующей трех лежащих в одной плоскости сил, показанных на **Рис. 6.7**.

Сила $A, f_A = 10\angle 45°$, сила $B, f_B = 8\angle 120°$, сила $C, f_C = 15\angle 210°$.

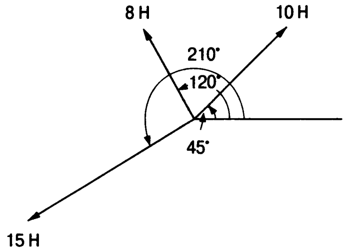


Рис. 6.7

Результирующая сила составляет

$$f_A + f_B + f_C = 10\angle 45° + 8\angle 120° + 15\angle 210° =$$
$$= 10(\cos 45° + j\sin 45°) + 8(120° + j\sin 120°) +$$
$$+ 15(\cos 210° + j\sin 210°) = (7.071 + j7.071) + (-4.00 + j6.928) +$$
$$+ (-12.99 - j7.50) = -9.919 + j6.499.$$

Величина результирующей силы есть $\sqrt{(-9.919)^2 + 6.499^2} = \mathbf{11.86}$ Н.

Направление результирующей силы будет $\operatorname{arctg}\left(\frac{6.499}{-9.919}\right) = \mathbf{146.77°}$

(поскольку $-9.919 + j6.499$ лежит во втором квадранте).

6.2. ТЕОРЕМА МУАВРА

6.2.1. Введение

Из теории умножения комплексных чисел в полярной форме

$$(r\angle\theta) \times (r\angle\theta) = r^2\angle 2\,\theta.$$

Аналогично $(r\angle\theta) \times (r\angle\theta) \times (r\angle\theta) = r^3\angle 2\,\theta$ и т. д.

В общем виде *теорема Муавра* гласит:

$$\boxed{[(r\angle\theta)]^n = r^n\angle n\theta}$$

Теорема верна для всех положительных, отрицательных и дробных значений *n*. Теорема используется для определения степеней и корней комплексных чисел.

6.2.2. Степени комплексных чисел

Пример. Найти $[3\angle 20°]^4$.

По теореме Муавра:

$$[3\angle 20°]^4 = 3^4\angle(4 \times 20°) = \mathbf{81\angle 80°}.$$

Пример. Выразить $(-2+j3)^6$ в полярной форме.

$$(-2+j3) = \sqrt{(-2)^2+3^2}\angle \operatorname{arctg}\frac{3}{-2} = \sqrt{13}\angle 123.69°,$$

поскольку $-2+j3$ лежит во втором квадранте.

$$(-2+j3)^6 = [\sqrt{13}\angle 123.69°]^6 =$$

$$= (\sqrt{13})^6\angle(6\times 123.69°) = 2197\angle 742.14°.$$

Учитывая, что $742.14° \equiv 742.14° - 360° - 360° = 22.14°$, получим

$$2197\angle 742.14° = \mathbf{2197\angle 22.14°}.$$

6.2.3. Корни комплексных чисел

Квадратный корень из комплексного числа определяется при подстановке в теорему Муавра $n = \frac{1}{2}$. То есть

$$\sqrt{r\angle\theta} = [r\angle\theta]^{1/2} = r^{1/2}\angle\frac{1}{2}\theta = \sqrt{r}\angle\frac{\theta}{2}.$$

Существует два корня вещественного числа, равные по величине, но противоположные по знаку.

Пример. Найти два квадратных корня комплексного числа $(5+j12)$ в полярной и декартовой форме.

$$(5+j12) = \sqrt{5^2+12^2}\angle \operatorname{arctg}\frac{12}{5} = 13\angle 67.38°.$$

При нахождении квадратного корня получаются два результата. Один из способов получить второе решение — выразить $13\angle 67.38°$ в виде $13\angle(67.38° + 360°)$, т. е. $13\angle 427.38°$. При делении угла на 2 получается угол меньше 360°. Итак,

$$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{13\angle 67.38°} = [13\angle 67.38°]^{1/2} = 13^{1/2}\angle\left(\frac{1}{2}\times 67.38°\right) =$$

$$= \sqrt{13}\angle 33.69° = 3.61\angle 33.69°$$

и

$$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{13\angle 427.38°} = [13\angle 427.38°]^{1/2} =$$

$$= 13^{1/2}\angle\frac{1}{2}\times 427.38° = \sqrt{13}\angle 213.69° = 3.61\angle 213.69°.$$

Таким образом, два корня в полярной форме: $3.61\angle 33.69°$ и $3.61\angle -146.69°$.

$$\sqrt{13}\angle 33.69° = \sqrt{13}(33.69° + j\sin 33.69°) = 3.0 + j2.0\,.$$

$$\sqrt{13}\angle 213.69° = \sqrt{13}(\cos 213.69° + j\sin 213.69°) = -3.0 - j2.0\,.$$

Таким образом, два корня в декартовой форме: $\pm(3.0 + j2.0)$.

На комплексной плоскости, как видно на **Рис. 6.8**, корни повернуты друг относительно друга на 180°; это всегда характерно для корней комплексных чисел.

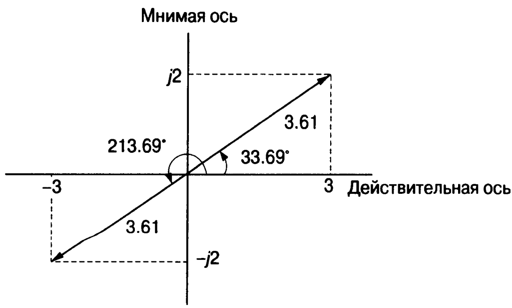


Рис. 6.8

В общем, **при нахождении корня степени n из комплексного числа существует n решений**. Например, существует три значения кубического корня, пять значений для корня пятой степени и т. д. При нахождении корней комплексного числа модуль r всегда один и тот же, а аргументы θ разные. Аргументы симметрично расположены на комплексной плоскости с интервалом $\frac{360°}{n}$, где n — число искомых корней. Таким образом, если одно из значений кубического корня комплексного числа равно, скажем, $5\angle 20°$, другие два значения симметрично расположены с интервалом $\frac{360°}{3}$, т. е. отстоят на 120° от первого корня, и эти три корня — $5\angle 20°$, $5\angle 140°$ $5\angle 260°$.

6.2.4. Экспоненциальная форма записи комплексного числа

Некоторые математические функции могут быть выражены в виде степенных рядов. Приведем три примера:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\,, \qquad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots. \tag{3}$$

Заменим x в уравнении (1) на мнимое число $j\theta$:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \ldots =$$

$$= 1 + j\theta + \frac{j^2\theta^2}{2!} + \frac{j^3\theta^3}{3!} + \frac{j^4\theta^4}{4!} + \frac{j^5\theta^5}{5!} + \ldots.$$

По определению $j = \sqrt{-1}$; следовательно, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ и т. д. Таким образом,

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \ldots.$$

Группируем действительные и мнимые члены:

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right).$$

Однако из уравнений (2) и (3):

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) = \cos\theta \text{ и } \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right) = \sin\theta.$$

Итак,

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta} \tag{4}$$

Подставим $-\theta$ вместо θ в уравнение (4):

$$e^{j(-\theta)} = \cos(-\theta) - j\sin(\theta).$$

Итак,

$$\boxed{e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta} \tag{5}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа z такова: $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$. Но согласно уравнению (4), $\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$.

Следовательно,

$$\boxed{z = re^{j\theta}}$$

Такая форма записи комплексного числа называется *экспоненциальной формой.*

Итак, существует три формы записи комплексного числа:

1. $z = (a + jb)$, называемая *декартовой формой;*
2. $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ или $r\angle\theta$, называемая *тригонометрической* (*полярной*) *формой;*
3. $z = re^{j\theta}$, называемая *экспоненциальной формой.*

Экспоненциальная форма выводится из полярной. Например, $4\angle 30°$ в экспоненциальной форме имеет вид $4e^{j\pi/6}$. (Отметим, что для $re^{j\theta}$, θ должно быть задано в радианах.)

Например, $(3 - j4) = \mathbf{5\angle{-53.13°} = 5\angle{-0.927}}$ в полярной форме, что равно $\mathbf{5e^{-j0.927}}$ в экспоненциальной форме.

Пример. Записать $7.2e^{j1.5}$ в полярной и декартовой форме.
$7.2e^{j1.5} = 7.2\angle 1.5$ радиан $= 7.2\angle 85.94°$ в полярной форме или
$7.2\cos 1.5 + j7.2\sin 1.5 = \mathbf{0.509 + j7.182}$ в декартовой форме.

Пример. Выразить $2e^{1+j\pi/3}$ в полярной и декартовой форме.

$z = 2e^{1+j\pi/3} = (2e^1)(e^{j\pi/3}) = (2e^1)\angle\frac{\pi}{3}$ (или $2e\angle 60°$) в полярной форме. Это равно

$2e\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = \mathbf{2.718 + j4.708}$ в декартовой форме.

Пример. Если $z = 4e^{j1.3}$, то

$\ln z = \ln(4e^{j1.3}) = \mathbf{\ln 4 + j1.3}$ (или $\mathbf{1.386 + j1.300}$) в декартовой форме, а в полярной форме равно $\mathbf{1.90\angle 43.17° = 1.90\angle 0.753}$.

Пример.

$$\begin{aligned}\ln(3 + j4) &= \ln[5\angle 0.927] = \ln[5e^{j0.927}] = \ln 5 + \ln(e^{j0.927}) = \\ &= \ln 5 + j0.927 = 1.609 + j0.927 = \\ &= \mathbf{1.857\angle 29.95°}, \text{ или } \mathbf{1.857\angle 0.523}.\end{aligned}$$

Глава 7

Матрицы и детерминанты

7.1. ТЕОРИЯ МАТРИЦ И ДЕТЕРМИНАНТОВ

7.1.1. Матричная форма записи

Матрицы и детерминанты в основном используются для решения систем линейных уравнений. В данной главе речь идет о теории матриц и детерминантов; эта теория далее используется в разд. 7.2 для решения систем уравнений. Коэффициенты при переменных в системах линейных уравнений можно записать в матричной форме. Коэффициенты при x и y в системе уравнений

$$x + 2y = 3,$$
$$4x - 5y = 6$$

в матричной форме имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Аналогично коэффициенты при p, q и r в уравнениях

$$1.3p - 2.0q + r = 7,$$
$$3.7p + 4.8q - 7r = 3,$$
$$4.1p + 3.8q + 12r = -6$$

в матричной форме записи имеют вид $\begin{pmatrix} 1.3 & -2.0 & 1 \\ 3.7 & 4.8 & -7 \\ 4.1 & 3.8 & 12 \end{pmatrix}$.

Числа в матрице называются *массивом,* а коэффициенты, образующие массив, называются *элементами* матрицы. Число строк в матрице обычно обозначают m, число столбцов — n, а матрица называется «матрица $m \times n$». Таким образом, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ — это матрица 2×3.

Матрицы нельзя выразить в виде единственного числового значения, но их часто можно упростить или скомбинировать и найти неизвестные элементы путем сравнения. Арифметические правила сложения, вычитания, умножения и деления чисел применимы и к матрицам, причем правила для матриц подчиняются большинству основных правил арифметики.

7.1.2. Сложение, вычитание и умножение матриц

Сложение матриц

Соответствующие элементы двух матриц можно складывать для получения одной матрицы.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) & -1+0 \\ -7 \quad +7 & 4+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Вычитание матриц

Если A — матрица, B — другая матрица, то $(A - B)$ — это матрица, полученная при вычитании элементов B из соответствующих элементов A.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-3) & -1-0 \\ -7 \quad -7 & 4-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-14} & \mathbf{8} \end{pmatrix}.$$

Умножение

Умножение матрицы на число называется *скалярным умножением,* при этом получается матрица, каждый элемент которой равен соответствующему элементу исходной матрицы, умноженному на это число.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, то

$$2A - 3B + 4C = 2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -21 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6-6+4 & 0-(-3)+0 \\ 14-(-21)+(-8) & -8-12+(-16) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{27} & \mathbf{-36} \end{pmatrix}.$$

При перемножении матриц A и B получается матрица, элементы которой являются результатом умножения строк матрицы A на соответствующие столбцы матрицы B.

Две матрицы A и B могут быть перемножены при условии, что число элементов в строках матрицы A равно числу элементов в столбцах B. В общем, при умножении матрицы размера $(m \times n)$ на матрицу размера $(n \times r)$ получается матрица $(m \times r)$. Таким образом, при умножении матрицы 2×3 на матрицу 3×1 получится матрица 2×1.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пусть $A \times B = C$, где $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$.

C_{11} — это сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B, т. е. $C_{11} = (2 \times (-5)) + (3 \times (-3)) = -19$. C_{12} — это сумма произведений элементов первой строки A на элементы второго столбца B, т. е. $C_{12} = (2 \times 7) + (3 \times 4) = 26$. C_{21} — это сумма произведений элементов второй строки A на элементы первого столбца B, т. е. $C_{21} = (1 \times (-5)) + ((-4) \times (-3)) = 7$. Наконец, C_{22} — это сумма произведений элементов второй строки A на элементы второго столбца B, т. е. $C_{22} = (1 \times 7) + ((-4) \times 4) = -9$. Итак,

$$A \times B = \begin{pmatrix} \mathbf{-19} & \mathbf{26} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3 \times 2) + (4 \times 5) + (0 \times (-1)) \\ (-2 \times 2) + (6 \times 5) + (-3 \times (-1)) \\ (7 \times 2) + (-4 \times 5) + (1 \times (-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{26} \\ \mathbf{29} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix}.$$

В алгебре переместительный закон умножения устанавливает, что $a \times b = b \times a$. Для матриц этот закон верен только в отдельных случаях, а в общем $A \times B$ **не равно** $B \times A$.

7.1.3. Единичная матрица

Единичная матрица I — это такая матрица, все элементы главной диагонали (\) которой равны 1, а все остальные элементы равны 0. Умножение матрицы на I эквивалентно арифметическому умножению числа на 1.

7.1.4. Детерминант матрицы 2 × 2

Детерминант матрицы 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определяется как $(ad - bc)$.

Элементы детерминанта матрицы записываются между вертикальными линиями. Таким образом, детерминант $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ записывается как $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ и равен $(3 \times 6) - (-4 \times 1)$, т. е. $18 - (-4) = 22$. Следовательно, детерминант матрицы может быть выражен одним числом , т. е. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 22$.

7.1.5. Обратная матрица 2 × 2

Матрица, обратная матрице A, — это матрица A^{-1}, такая, что $A \times A^{-1} = I$, т. е. произведение матрицы на обратную ей равно единичной матрице.

Для любой матрицы $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ обратная матрица может быть получена следующим образом:

1. Поменять местами положение p и s.
2. Поменять знаки q и r.
3. Умножить новую матрицу на величину, обратную детерминанту матрицы $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Таким образом, матрица, обратная к $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, это

$$\frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7.1.6. Детерминант матрицы 3 × 3

Минор элемента матрицы 3 × 3 — это значение детерминанта 2 × 2, полученного при вычеркивании строки и столбца, содержащих этот элемент.

Таким образом, для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ минор элемента 4 получается при вычеркивании строки (4 5 6) и столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, в итоге остается 2 × 2 детерминант $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, т. е. минор элемента 4; это $(2 \times 9) - (3 \times 8) = -6$.

Знак минора зависит от его положения в матрице, распределение знаков таково: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Итак, с учетом распределения знаков, минор элемента 4 в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(-6) = 6.$$

Минор, взятый с соответствующим знаком, называется *алгебраическим дополнением* элемента.

> **Значение детерминанта матрицы 3 × 3 — это сумма произведений элементов на их алгебраические дополнения для любой строки или любого столбца соответствующей матрицы 3 × 3.**

Таким образом, существует шесть различных способов вычисления детерминанта 3 × 3, и все они должны давать одно значение.

Пример. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

Используем первую строку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 + 24) - 4(-10 + 6) - 3(20 + 2) =$$
$$= 28 + 16 - 66 = \mathbf{-22}.$$

Используем второй столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(-10 + 6) + 2(2 - 3) + 4(6 - 15) =$$
$$= 16 - 2 - 36 = \mathbf{-22}.$$

7.1.7. Обратная матрица 3 × 3

Матрица, *сопряженная* к матрице A, определяется следующим образом:

1. Формируется матрица B из алгебраических дополнений матрицы A.

2. Матрица B транспонируется в матрицу B^T, при этом строки матрицы B становятся столбцами матрицы B^T. Тогда $\mathbf{adj}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B^T}$.

A^{-1}, обратная матрица для матрицы A, находится как $A^{-1} = \dfrac{\mathbf{adj}\, \boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$, где adj A — сопряженная матрица для A, а $|A|$ — детерминант матрицы A.

Пример. Найти обратную матрицу для $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

$$\text{Обратная матрица} = \frac{\text{Сопряженная матрица}}{\text{Детерминант}}.$$

Матрица алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} -17 & 9 & 15 \\ 23 & -13 & -21 \\ 18 & -10 & -16 \end{pmatrix}$.

Транспонируем матрицу алгебраических дополнений (т. е. находим сопряженную матрицу):

$$\begin{pmatrix} -17 & 23 & 18 \\ 9 & -13 & -10 \\ 15 & -21 & -16 \end{pmatrix}.$$

Детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix} = 1(7-24)-5(-21+12)-2(18-3)=$$

$$= -17 + 45 - 30 = -2.$$

Следовательно, обратная матрица для

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \text{ — это } \frac{\begin{pmatrix} -17 & 23 & 18 \\ 9 & -13 & -10 \\ 15 & -21 & -16 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} \mathbf{8.5} & \mathbf{-11.5} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-4.5} & \mathbf{6.5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-7.5} & \mathbf{10.5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}.$$

7.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЦ И ДЕТЕРМИНАНТОВ

7.2.1. Решение методом матриц

Два неизвестных

Процедура решения *систем линейных уравнений* с *двумя неизвестными методом матриц* включает следующие шаги:

1. Записываем уравнения в виде

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

2. Составляем матричное уравнение, соответствующее данным уравнениям, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

3. Находим матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (см. разд. 7.1):

$$\frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

4. Умножаем обе части уравнения (1) на обратную матрицу.

5. Находим x и y, приравняв соответствующие элементы полученных столбцов.

Пример. Используя матричный метод, решить систему уравнений

$$3x + 5y - 7 = 0, \qquad (1)$$

$$4x - 3y - 19 = 0. \qquad (2)$$

а) Записываем уравнения в виде $a_i x + b_i y = c_i$:

$$3x + 5y = 7,$$

$$4x - 3y = 19.$$

б) Получаем матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

в) Находим обратную матрицу для $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{3 \times (-3) - 5 \times 4}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{4}{29} & \frac{-3}{29} \end{pmatrix}.$$

г) Умножаем обе части уравнения (б) на полученный результат (в) и, помня, что $A \times A^{-1} = I$ — это единичная матрица, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{4}{29} & \frac{-3}{29} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} + \frac{95}{29} \\ \frac{28}{29} - \frac{57}{29} \end{pmatrix}$, т. е. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

д) Приравнивая соответствующие элементы, находим, что $x = 4$, $y = -1$; это решение можно проверить подстановкой в исходные уравнения.

Три неизвестных

Процедура решения *систем линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом* включает следующие шаги:

1. Записываем уравнения в виде

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3.$$

2. Составляем соответствующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

3. Находим обратную к $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ матрицу (см. разд. 7.1).

4. Умножаем обе части уравнения п. 2 на обратную матрицу.

5. Находим x, y и z, приравнивая соответствующие элементы столбцов.

Пример. Используя матричный метод, решить систему уравнений

$$x + y + z - 4 = 0, \qquad (1)$$
$$2x - 3y + 4z - 33 = 0, \qquad (2)$$
$$3x - 2y - 2z - 2 = 0. \qquad (3)$$

а) Записываем уравнения в виде $a_ix + b_iy + c_iz = d_i$:

$$x + y + z = 4,$$
$$2x - 3y + 4z = 33,$$
$$3x - 2y - 2z = 2.$$

б) Составляем матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

в) Находим матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, по формуле

$A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{|A|}$.

Сопряженная к A матрица — это транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов (см. разд. 7.1).

Матрица алгебраических дополнений есть $\begin{pmatrix} 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Транспонирование этой матрицы дает $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

Находим детерминант A, т. е. сумму произведений элементов и их алгебраических дополнений, используя разложение по первой строке:

$$1\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (1 \times 14) - (1 \times (-16)) + (1 \times 5) = 35.$$

Значит, матрица, обратная к A, — это

$$A^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

г) Умножаем обе части (4) на полученный результат (5) и, помня, что $A \times A^{-1} = I$ — это единичная матрица, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 16 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} (14 \times 4) + (0 \times 33) + (7 \times 2) \\ (16 \times 4) + (-5 \times 33) + ((-2) \times 2) \\ (5 \times 4) + (5 \times 33) + ((-5) \times 2) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 70 \\ -105 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

д) Приравнивая соответствующие элементы, находим: $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = -3}$, $\boldsymbol{z = 5}$; этот результат можно проверить подстановкой в исходное уравнение.

7.2.2. Решение методом детерминантов

Два неизвестных

При решении *систем линейных уравнений* с *двумя неизвестными методом детерминантов* выполняем следующие шаги:

1. Записываем уравнения в виде

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0.$$

2. Решение находим из уравнений $\frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D}$, где

$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы коэффициентов, оставшихся при вычеркивании x-столбца;

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы коэффициентов, оставшихся при вычеркивании y-столбца;

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы коэффициентов, оставшихся при вычеркивании столбца констант.

Пример. Решить методом детерминантов следующую систему уравнений:

$$3x - 4y = 12,$$
$$7x + 5y = 6.5.$$

Следуем описанной выше процедуре:

а) $3x - 4y - 12 = 0,$
$7x + 5y - 6.5 = 0.$

б) $$\frac{x}{\begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 5 & -6.5 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 7 & -6.5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x}{(-4)(-6.5)-(-12)(5)} = \frac{-y}{(3)(-6.5)-(-12)(7)} =$$

$$= \frac{1}{(3)(5)-(-4)(7)},$$

$$\frac{x}{26+60} = \frac{-y}{-19.5+84} = \frac{1}{15+28},$$

$$\frac{x}{86} = \frac{-y}{64.5} = \frac{1}{43}.$$

Поскольку $\frac{x}{86} = \frac{1}{43}$, то $x = \frac{86}{43} = \mathbf{2}$,

и поскольку $\frac{-y}{64.5} = \frac{1}{43}$, то $y = -\frac{64.5}{43} = \mathbf{-1.5}$.

Три неизвестных

При решении *систем уравнений с тремя неизвестными методом детерминантов* выполняем следующие шаги:

1. Записываем уравнения в виде

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

2. Находим решение из соотношений $\frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{z}{D_z} = \frac{-1}{D}$, где

$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант коэффициентов, оставшихся после вычеркивания x-столбца;

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант коэффициентов, оставшихся после вычеркивания y-столбца;

$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант коэффициентов, оставшихся после вычеркивания z-столбца;

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$, т. е. детерминант коэффициентов, оставшихся после вычеркивания столбца констант.

Пример. Схема постоянного тока включает три замкнутых контура. Применяя закон Кирхгофа к замкнутым контурам, получаем следующие уравнения для токов в миллиамперах:

$$\begin{aligned} 2I_1 + 3I_2 - 4I_3 &= 26, \\ I_1 - 5I_2 - 3I_3 &= -87, \\ -7I_1 + 2I_2 + 6I_3 &= 12. \end{aligned}$$

Используем метод детерминантов для нахождения I_1, I_2 и I_3, следуя описанной выше процедуре:

а) $2I_1 + 3I_2 - 4I_3 - 26 = 0,$
$I_1 - 5I_2 - 3I_3 + 87 = 0,$
$-7I_1 + 2I_2 + 6I_3 - 12 = 0.$

б) Ищем решение из соотношения $\dfrac{I_1}{D_{I_1}} = \dfrac{-I_2}{D_{I_2}} = \dfrac{I_3}{D_{I_3}} = \dfrac{-1}{D}$, где

$$D_{I_1} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -26 \\ -5 & -3 & 87 \\ 2 & 6 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)\begin{vmatrix} -3 & 87 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -5 & 87 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} + (-26)\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-486) + 4(-114) - 26(-24) = \mathbf{-1290.}$$

$$D_{I_2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -26 \\ 1 & -3 & 87 \\ -7 & 6 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(36 - 522) - (-4)(-12 + 609) + (-26)(6 - 21) =$$
$$= -972 + 2388 + 390 = \mathbf{1806.}$$

$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -26 \\ 1 & -5 & 87 \\ -7 & 2 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(60 - 174) - (3)(-12 + 609) + (-26)(2 - 35) =$$
$$= -228 - 1791 + 858 = \mathbf{-1161}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \\ -7 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(-30 + 6) - (3)(6 - 21) + (-4)(2 - 35) =$$
$$= -48 + 45 + 132 = \mathbf{129}.$$

Таким образом, $\dfrac{I_1}{-1290} = \dfrac{-I_2}{1806} = \dfrac{I_3}{-1161} = \dfrac{-1}{129}$.

В итоге $I_1 = \dfrac{-1290}{129} = \mathbf{10}$ **мА**; $I_2 = \dfrac{1806}{129} = \mathbf{14}$ **мА**

и $I_3 = \dfrac{-1161}{129} = \mathbf{9}$ **мА.**

7.2.3. Решение с использованием правила Крамера

Правило Крамера гласит, что если

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3,$$

то $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D}}$ и $\boldsymbol{z} = \dfrac{\boldsymbol{D_z}}{\boldsymbol{D}}$, где $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы, полученной заменой x-столбца на b-столбец из правой части системы, записанной в матричной форме;

$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы, полученной заменой y-столбца на b-столбец из правой части системы, записанной в матричной форме;

$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, т. е. детерминант матрицы, полученной заменой z-столбца заменой на b-столбец из правой части системы, записанной в матричной форме.

Пример. Решить, используя правило Крамера, систему

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ 2x - 3y + 4z &= 33, \\ 3x - 2y - 2z &= 2. \end{aligned}$$

Следуем описанной выше процедуре:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1(6 - (-8)) - 1(-4 - 12) + 1(-4 - (-9)) =$$

$$= 14 + 16 + 5 = \mathbf{35},$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 33 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4(6 - (-8)) - 1(-66 - 8) + 1(-66 - (-6)) =$$

$$= 56 + 74 - 60 = \mathbf{70},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 33 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-66 - 8) - 4(-4 - 12) + 1(4 - 99) =$$

$$= -74 + 64 - 95 = \mathbf{-105},$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 33 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-6 - (-66)) - 1(4 - 99) + 4(-4 - (-9)) =$$

$$= 60 + 95 + 20 = \mathbf{175}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{70}{35} = \mathbf{-2}$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-105}{35} = \mathbf{-3}$

и $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{175}{35} = \mathbf{5}$.

7.2.4. Решение методом Гаусса

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$x + y + z = 4, \qquad (1)$$
$$2x - 3y + 4z = 33, \qquad (2)$$
$$3x - 2y - 2z = 2. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) вычтем уравнение (1), умноженное на 2:

$$0 - 5y + 2z = 25. \qquad (2')$$

Из уравнения (3) вычтем уравнение (1), умноженное на 3:

$$0 - 5y - 5z = -10. \qquad (3')$$

Оставим уравнения (1) и (2′) неизменными:

$$x + y + z = 4, \qquad (1)$$
$$0 - 5y + 2z = 25. \qquad (2')$$

Из уравнения (3′) вычтем уравнение (2′):

$$0 + 0 - 7z = -35. \qquad (3'')$$

Мы специально находили такие комбинации трех исходных уравнений, чтобы получить нулевые коэффициенты при некоторых неизвестных в уравнениях (2′) и (3″).

Теперь из уравнения (3″) получим $z = \frac{-35}{-7} = \mathbf{5}$; из уравнения (2′) находим $-5y + 2(5) = 25$, откуда $\boldsymbol{y} = \frac{25 - 10}{-5} = \mathbf{-3}$; и из уравнения (1) находим $x + (-3) + 5 = 4$, откуда $\boldsymbol{x} = 4 + 3 - 5 = \mathbf{2}$.

Рассмотренный метод называется *методом Гаусса*.

Из предыдущего примера делаем вывод, что для системы

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \qquad (1)$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \qquad (2)$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \qquad (3)$$

трехэтапная ***процедура*** решения системы трех уравнений с тремя неизвестными *методом Гаусса* такова:

1. Из уравнения (2) вычитаем уравнение (1), умноженное на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, и получаем уравнение (2′); из уравнения (3) вычитаем уравнение (1), умноженное на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и получаем уравнение (3′).

2. Из уравнения (3′) вычитаем уравнение (2′), умноженное на $\frac{a_{32}}{a_{22}}$, и получаем уравнение (3″).

3. Находим z из уравнения (3″), затем y из уравнения (2′) и, наконец, x из уравнения (1).

Пример. Схема постоянного тока содержит три замкнутых контура. Применяя закон Кирхгофа к замкнутым контурам, получаем следующие уравнения для токов в миллиамперах:

$$2I_1 + 3I_2 - 4I_3 = 26, \quad (1)$$

$$I_1 - 5I_2 - 3I_3 = -87, \quad (2)$$

$$-7I_1 + 2I_2 + 6I_3 = 12. \quad (3)$$

Используем метод Гаусса для нахождения I_1, I_2 и I_3. Следуем рассмотренной выше процедуре.

а) Вычтем из уравнения (2) уравнение (1), умноженное на 1/2:

$$0 - 6.5I_1 - I_3 = -100. \quad (2')$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (1), умноженное на $\frac{-7}{2}$:

$$0 + 12.5I_2 - 8I_3 = 103. \quad (3')$$

б) Вычтем из уравнения (3′) уравнение (2′), умноженное на $\frac{12.5}{-6.5}$:

$$0 + 0 - 9.23I_3 = -89.308. \quad (3'')$$

в) Из уравнения (3″) находим $\boldsymbol{I_3} = \frac{-89.308}{-9.923} = \mathbf{9}$ **мА**, из уравнения (2′) находим $-6.5I_2 - 9 = -100$, откуда $\boldsymbol{I_2} = \frac{-100+9}{-6.5} = \mathbf{14}$ **мА**, и из уравнения (1) находим

$2I_1 + 3(14) - 4(9) = 26$, откуда $\boldsymbol{I_1} = \frac{26-42+36}{2} = \frac{20}{2} = \mathbf{10}$ **мА**.

Глава 8

Булева алгебра и логические схемы

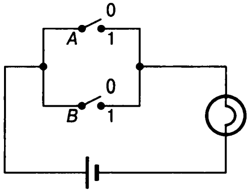
8.1. БУЛЕВА АЛГЕБРА

8.1.1. Булева алгебра и переключательные схемы

Триггерная (переключательная) схема — это устройство, элементы которого могут находиться только в одном из двух состояний. Таким образом, двухпозиционные переключатели, которые могут быть либо включены, либо выключены, и двоичная система счисления, имеющая разряды только 0 и 1, — это триггерные схемы. В булевой алгебре, если A представляет одно состояние, то $\overline{A}$ называется НЕ-A и представляет второе состояние.

Функция ИЛИ

В булевой алгебре ***функция ИЛИ*** для двух элементов A и B записывается в виде $A + B$ и означает «A, или B, или и A, и B». Эквивалентная электрическая схема с двумя входами для ***функции ИЛИ*** имеет вид двух переключателей, соединенных параллельно. Согласно **Рис. 8.1а**, лампа будет включена, если A включен, если B включен и если и A, и B включены одновременно. В таблице на **Рис. 8.1б** в столбцах 1 и 2 показаны все возможные комбинации состояний переключателей, где 0 означает состояние «выключен», а 1 — состояние «включен». В столбце 3 указано состояние лампы: 0 означает «выключена», 1 – «включена». Подобная таблица называется ***таблицей истинности***.



а) Переключательная схема функции ИЛИ

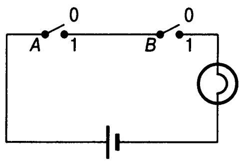
1	2	3
Вход (переключатели)		Выход (лампа)
A	B	$Z = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б) Таблица истинности функции ИЛИ

Рис. 8.1

Функция И

В булевой алгебре *функция И* двух элементов *A* и *B* записывается как $A \cdot B$ и определяется как «и *A*, и *B*». Эквивалентная электрическая схема с двумя входами для *функции И* имеет вид двух переключателей, соединенных последовательно. Согласно **Рис. 8.2а**, лампа будет включена, только если *A* и *B* включены одновременно. Таблица истинности *функции И* с двумя входами показана на **Рис. 8.2б**.



а) Переключательная схема функции И

Вход (переключатели)		Выход (лампа)
A	B	$Z = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б) Таблица истинности функции И

Рис. 8.2

Функция НЕ

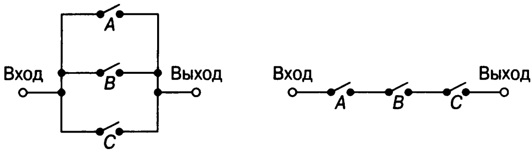
В булевой алгебре *функция НЕ* элемента *A* записывается как $\overline{A}$ и определяется как «противоположная к *A*». Таким образом, если *A* характеризует лампу во включенном состоянии, то $\overline{A}$ характеризует лампу в выключенном состоянии.

Таблица истинности функции НЕ приведена в **Табл. 8.1**.

Таблица 8.1. *Таблица истинности функции НЕ*

Вход A	Выход $Z = \overline{A}$
0	1
1	0

Представленные выше булевы выражения, эквивалентные переключательные схемы и таблицы истинности двух функций булевой алгебры приведены для системы с двумя входами. Система может иметь более двух входов, и булево выражение для функции ИЛИ с тремя входами, включающей элементы *A*, *B* и *C*, имеет вид $A + B + C$. Аналогично функция И с тремя входами записывается в виде $A \cdot B \cdot C$. Эквивалентные электрические схемы и таблицы истинности для функций ИЛИ и И с тремя входами показаны на **Рис. 8.3**.



Вход A B C	Выход $Z=A+B+C$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Вход A B C	Выход $Z=A\cdot B\cdot C$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

а) Электрическая схема функции ИЛИ и таблица истинности для нее

б) Электрическая схема функции И и таблица истинности для нее

Рис. 8.3

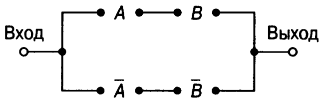
Чтобы получить на выходе нужное действие, часто необходимо использовать комбинации переключателей, соединенных и последовательно, и параллельно. Пусть действие на выходе переключательной схемы задается булевым выражением $Z = A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B}$. Таблица истинности для него приведена на **Рис. 8.4а**. В столбцах 1 и 2 данной таблицы даны все возможные сочетания A и B. Столбец 3 соответствует $A\cdot B$, а столбец 4 — $\overline{A}\cdot\overline{B}$, т. е. выход 1 получается и при $A = 0$, и при $B = 0$. Столбец 5 — это функция ИЛИ, приложенная к столбцам 3 и 4 и дающая на выходе $Z = A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B}$. Соответствующая переключательная схема показана на **Рис. 8.4б**, где A и B соединены последовательно для получения $A\cdot B$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соединены последовательно для получения $\overline{A}\cdot\overline{B}$, а $A\cdot B$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}$ соединены параллельно для получения $A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B}$. Используемые для обозначения символы таковы: A означает, что переключатель включен при A, равном 1, $\overline{A}$ означает, что переключатель включен при A, равном 0, и т. д.

Пример. Определить булево выражение и составить таблицу истинности для переключательной схемы, показанной на **Рис. 8.5**.

Переключатели между 1 и 2 на **Рис. 8.5** соединены последовательно и описываются булевым выражением $B\cdot A$. Параллельная схема соединения ветвей от 1 до 2 и от 3 до 4 описывается булевым выражением $(B\cdot A + \overline{B})$. Эта схема может рассматри-

1 A	2 B	3 $A \cdot B$	4 $\bar{A} \cdot \bar{B}$	5 $Z = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

а) Таблица истинности для $Z = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$



б) Схема переключения для $Z = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Рис. 8.4

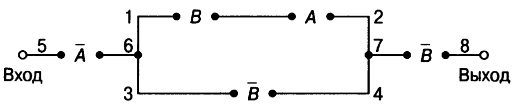


Рис. 8.5

ваться как один переключательный блок, в итоге получаем последовательное соединение схем от 5 до 6, от 6 до 7 и от 7 до 8. Таким образом, на выходе мы имеем $\boldsymbol{Z = \bar{A} \cdot (B \cdot A + \bar{B}) \cdot \bar{B}}$.

Искомая таблица истинности показана в **Табл. 8.2**. В столбцах 1 и 2 приведены все возможные комбинации переключателей A и B. Столбец 3 — это функция И, примененная к столбцам 1 и 2, в итоге получается $B \cdot A$. Столбец 4 — это $\bar{B}$, т. е. противоположность столбцу 2. Столбец 5 — это функция ИЛИ, примененная к столбцам 3 и 4. Столбец 6 — это $\bar{A}$, т. е. противоположность столбцу 1. Столбец 7 значений на выходе получается применением функции И к столбцам 4, 5 и 6.

Таблица 8.2

1 A	2 B	3 $B \cdot A$	4 $\bar{B}$	5 $B \cdot A + \bar{B}$	6 $\bar{A}$	7 $Z = \bar{A} \cdot (B \cdot A + \bar{B}) \cdot \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Пример. Определить булево выражение и составить таблицу истинности для переключательной схемы с **Рис. 8.6**.

Параллельная схема от 1 до 2 и от 3 до 4 дает ($A + \overline{B}$), и эта система эквивалентна одной переключательной схеме между 7 и 2. Параллельная схема от 5 до 6 и от 7 до 2 дает $C + (A + \overline{B})$, и эта система эквивалентна одной переключательной схеме между 8 и 2. Последовательная схема от 9 до 8 и от 8 до 2 дает на выходе $\boldsymbol{Z = B \cdot [C + (A + \overline{B})]}$.

Таблица истинности показана в **Табл. 8.3**. В столбцах 1, 2 и 3 приведены все возможные сочетания A, B и C. Столбец 4 — это $\overline{B}$, и он получен инвертированием столбца 2.

Столбец 5 — это функция ИЛИ, примененная к столбцам 1 и 4, в итоге получаем ($A + \overline{B}$). Столбец 6 — это функция ИЛИ, примененная к столбцам 3 и 5, в итоге получаем $C + (A + \overline{B})$. Выражение для выхода схемы приведено в столбце 7, и получено при применении функции И к столбцам 2 и 6, в итоге получаем $Z = B \cdot [C + (A + \overline{B})]$.

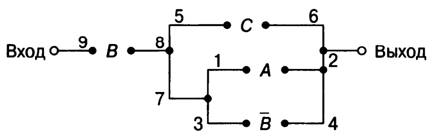


Рис. 8.6

Таблица 8.3

1 A	2 B	3 C	4 $\overline{B}$	5 $A+\overline{B}$	6 $C+(A+\overline{B})$	7 $Z=B\cdot[C+(A+\overline{B})]$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

8.1.2. Упрощение булевых выражений

Булевы выражения можно использовать для описания сложных переключательных схем или логических систем. Если булево выражение можно упростить, значит, число переключателей или логических элементов можно уменьшить, что позволит снизить стоимость схемы. Три основных способа упрощения булевых выражений таковы:

1. Применение законов и правил булевой алгебры.
2. Использование законов Моргана.
3. Использование карты Карно.

8.1.3. Законы и правила булевой алгебры

Свод основных законов и правил булевой алгебры приведен в **Табл. 8.4**.

Таблица 8.4

№	Название	Правило или закон
1	Переместительные (коммутативные) законы	$A+B=B+A$
2		$A\cdot B=B\cdot A$
3	Ассоциативные (сочетательные) законы	$(A+B)+C=A+(B+C)$
4		$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
5	Распределительные законы	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
6		$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
7	Правила сложения	$A+0=A$
8		$A+1=1$
9		$A+A=A$
10		$A+\overline{A}=1$
11	Правила умножения	$A\cdot 0=0$
12		$A\cdot 1=A$
13		$A\cdot A=A$
14		$A\cdot\overline{A}=0$
15	Правила поглощения	$A+A\cdot B=A$
16		$A\cdot(A+B)=A$
17		$A+\overline{A}\cdot B=A+B$

Пример. Упростить булево выражение $\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot Q+P\cdot\overline{Q}$.

Согласно **Табл. 8.4**, № правила

$\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot Q+P\cdot\overline{Q}=\overline{P}\cdot(\overline{Q}+Q)+P\cdot\overline{Q}=$ 5

$=\overline{P}\cdot 1+P\cdot\overline{Q}=$ 10

$=\boldsymbol{\overline{P}+P\cdot\overline{Q}}$ 12

Пример. Упростить $(P+\overline{P}\cdot Q)\cdot(Q+\overline{Q}\cdot P)$.

Согласно **Табл. 8.4**, № правила

$(P+\overline{P}\cdot Q)\cdot(Q+\overline{Q}\cdot P)=P\cdot(Q+\overline{Q}\cdot P)+\overline{P}\cdot Q\cdot(Q+\overline{Q}\cdot P)=$ 5

$=P\cdot Q+P\cdot\overline{Q}\cdot P+\overline{P}\cdot Q\cdot Q+\overline{P}\cdot Q\cdot\overline{Q}\cdot P=$ 5

$=P\cdot Q+P\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot Q+\overline{P}\cdot Q\cdot\overline{Q}\cdot P=$ 13

$=P\cdot Q+P\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot Q+0=$ 14

$=P\cdot Q+P\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot Q=$ 7

$=P\cdot(Q+\overline{Q})+\overline{P}\cdot Q=$ 5

$=P\cdot 1+\overline{P}\cdot Q=$ 10

$=\boldsymbol{P+\overline{P}\cdot Q}$ 12

Пример. Упростить $F\cdot G\cdot\overline{H}+F\cdot G\cdot H+\overline{F}\cdot G\cdot H$.

Согласно **Табл. 8.4**,	№ правила
$F\cdot G\cdot\bar{H}+F\cdot G\cdot H+\bar{F}\cdot G\cdot H=F\cdot G\cdot(\bar{H}+H)+\bar{F}\cdot G\cdot H=$	5
$=F\cdot G\cdot 1+\bar{F}\cdot G\cdot H=$	10
$=F\cdot G+\bar{F}\cdot G\cdot H=$	12
$=\boldsymbol{G\cdot(F+\bar{F}\cdot H)}$	5

8.1.4. Законы Моргана

Законы Моргана можно использовать для упрощения функций НЕ, содержащих два и более элемента. Законы устанавливают, что

$$\boxed{\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}}$$

Эти законы можно проверить по таблицам истинности.

Пример. Упростить булево выражение $\overline{\bar{A}\cdot B}+\overline{\bar{A}+B}$, используя законы Моргана и правила булевой алгебры.

Применяем закон Моргана к первому члену:

$$\overline{\bar{A}\cdot B}=\bar{\bar{A}}+\bar{B}=A+\bar{B},\ \text{так как}\ \bar{\bar{A}}=A.$$

Применяем закон Моргана ко второму члену:

$$\overline{\bar{A}+B}=\bar{\bar{A}}\cdot\bar{B}=A\cdot\bar{B}.$$

Значит, $\overline{\bar{A}\cdot B}+\overline{\bar{A}+B}=(A+\bar{B})+A\cdot\bar{B}$.

Раскрываем скобки и совершаем перестановку: $A+A\cdot\bar{B}+\bar{B}$.

Но согласно правилу 15 из **Табл. 8.4**, $A+A\cdot B=A$. Значит, $A+A\cdot\bar{B}=A$. Итак, $\boldsymbol{\overline{\bar{A}\cdot B}+\overline{\bar{A}+B}=A+\bar{B}}$.

Пример. Упростить булево выражение $(\overline{A\cdot\bar{B}+C})\cdot(\bar{A}+\overline{B\cdot\bar{C}})$, используя законы Моргана и правила булевой алгебры.

Применяем закон Моргана к первому члену:

$$\overline{(A\cdot\bar{B}+C)}=\overline{A\cdot\bar{B}}\cdot\bar{C}=(\bar{A}+\bar{\bar{B}})\cdot\bar{C}=(\bar{A}+B)\cdot\bar{C}=\bar{A}\cdot\bar{C}+B\cdot\bar{C}.$$

Применяем закон Моргана ко второму члену:

$$(\bar{A}+\overline{B\cdot\bar{C}})=\bar{A}+(\bar{B}+\bar{\bar{C}})=\bar{A}+(\bar{B}+C).$$

Значит, $\overline{(A\cdot\overline{B}+C)}\cdot(\overline{A}+\overline{B\cdot\overline{C}}) = (\overline{A}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)=$
$=\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}\cdot C.$

Но согласно **Табл. 8.4**, $\overline{A}\cdot\overline{A}=\overline{A}$ и $\overline{C}\cdot C=B\cdot\overline{B}=0$.

Следовательно, булево выражение приобретает вид

$$\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{C}(1+\overline{B}+B)=\overline{A}\cdot\overline{C}(1+B)=\overline{A}\cdot\overline{C}.$$

Итак, $\overline{(A\cdot\overline{B}+C)}\cdot(\overline{A}+\overline{B\cdot\overline{C}}) = \overline{A}\cdot\overline{C}$.

8.1.5. Карты Карно

Карты Карно двух переменных

Таблица истинности для некого выражения с двумя переменными приведена в **Табл. 8.5а**, где «1» в третьей строке на выходе означает, что это выражение есть $Z = A\cdot\overline{B}$. Каждое из четырех возможных булевых выражений, связанных с функцией двух переменных, может быть представлено, как показано в **Табл 8.5б**, где каждая ячейка заменяет целую строку таблицы истинности. Аналогичная матрица может быть использована для описания функции $Z = A\cdot\overline{B}$, для этого надо разместить 1 в ячейке, соответствующей $A\cdot\overline{B}$, и 0 — в остальных ячейках. Данный метод описания булевых выражений называется *картой Карно* двух переменных, и он проиллюстрирован в **Табл. 8.5в**.

Таблица 8.5

Входы		Выход	Булево выражение
A	B	Z	
0	0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	0	$\overline{A}\cdot B$
1	0	1	$A\cdot\overline{B}$
1	1	0	$A\cdot B$

а)

$B \backslash A$	0 ($\overline{A}$)	1 (A)
0($\overline{B}$)	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$A\cdot\overline{B}$
1(B)	$\overline{A}\cdot B$	$A\cdot B$

б)

$B \backslash A$	0	1
0	0	1
1	0	0

в)

Чтобы упростить булево выражение с двумя переменными, его описывают в виде карты Карно, рассмотренной выше. Все ячейки карты, ограниченные общей вертикальной или горизонтальной линией, формируют ***пару***. (Это склеивание двух ячеек, а не просто объединение двух ячеек в одну.) Упрощенное булево выражение для пары определяется переменными, общими для всех ячеек пары.

Карты Карно трех переменных

Таблица истинности для некого выражения с тремя переменными приведена в **Табл. 8.6а**, единицы в столбце «выход» означают, что это выражение есть $Z=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$. Каждое из восьми возможных булевых выражений, определяемых функцией трех переменных, может быть описано, как показано в **Табл. 8.6б**, где каждая ячейка соответствует строке таблицы истинности. Матрица, аналогичная приведенной в **Табл. 8.6б**, может быть использована для описания $Z=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$; для этого в ячейках, соответствующих булевым членам из правой части булева выражения, надо записать 1, а в остальных ячейках — 0.

Таблица 8.6

Входы			Выход	Булево выражение
A	B	C	Z	
0	0	0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	0	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	0	1	0	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
1	1	1	0	$A\cdot B\cdot C$

а)

C \ $A\cdot B$	0·0 $(\overline{A}\cdot\overline{B})$	0·1 $(\overline{A}\cdot B)$	1·1 $(A\cdot B)$	1·0 $(A\cdot\overline{B})$
0($\overline{C}$)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1(C)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$

б)

C \ $A\cdot B$	0·0	0·1	1·1	1·0
0	0	0	1	0
1	1	1	0	0

в)

Такой метод описания булевых выражений с тремя переменными называется картой Карно трех переменных, она показана в **Табл. 8.6в**. Чтобы упростить булево выражение с тремя переменными, его необходимо представить в виде рассмотренной выше карты Карно. Все ячейки, имеющие общий вертикальный или горизонтальный край, «склеиваются» для формирования групп двух или четырех ячеек. Горизонтальные линии снизу или сверху ячеек при склеивании считаются общим краем, так же как и вертикальные линии, ограничивающие ячейку слева или справа. Упрощенное булево выражение группы определяется теми переменными, которые являются общими для всех ячеек группы.

Карты Карно четырех переменных

Табл. 8.7а — это таблица истинности некого выражения с четырьмя переменными. Единицы в колонке выхода означают, что $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$. Каждое из шестнадцати возможных булевых выражений для функции четырех переменных представлено в **Табл. 8.7б**, где каждая ячейка соответствует строке таблицы истинности. Аналогичная матрица может быть использована для описания выражения $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$; для этого в ячейках, соответствующих членам в правой части булева выражения, следует поставить 1, а в остальных ячейках — нули. Данный метод описания выражений с четырьмя переменными называется картой Карно четырех переменных; она представлена в **Табл. 8.7в**.

Таблица 8.7

Входы				Выход	Булево выражение
A	B	C	D	Z	
0	0	0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
0	0	0	1	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$
0	0	1	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$
0	0	1	1	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
0	1	0	0	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
0	1	0	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$
0	1	1	0	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
0	1	1	1	0	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$
1	0	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
1	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$
1	0	1	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$
1	0	1	1	0	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
1	1	0	0	0	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
1	1	0	1	0	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$
1	1	1	0	1	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
1	1	1	1	0	$A \cdot B \cdot C \cdot D$

а)

$C \cdot D$ \ $A \cdot B$	0·0 ($\overline{A} \cdot \overline{B}$)	0·1 ($\overline{A} \cdot B$)	1·1 ($A \cdot B$)	1·0 ($A \cdot \overline{B}$)
00 ($\overline{C} \cdot \overline{D}$)	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
01 ($\overline{C} \cdot D$)	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$
11 ($C \cdot D$)	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$	$A \cdot B \cdot C \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
10 ($C \cdot \overline{D}$)	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$

б)

$C \cdot D$ \ $A \cdot B$	0·0	0·1	1·1	1·0
0·0	0	0	0	0
0·1	0	0	0	0
1·1	0	0	0	0
1·0	1	1	1	1

в)

Чтобы упростить булеву функцию четырех переменных, ее записывают в виде карты Карно, как было рассмотрено выше. Все ячейки карты, имеющие общие вертикальные или горизонтальные края, «склеиваются» для формирования групп из восьми, четырех или двух ячеек.

При склеивании горизонтальные линии сверху и снизу ячеек и вертикальные линии, ограничивающие ячейки слева и справа, могут рассматриваться как общий край. Упрощенное булево выражение группы определяется переменными, общими для всех ячеек группы.

Общий ход упрощения булева выражения с использованием карты Карно

1. Нарисовать матрицу с четырьмя, восемью или шестнадцатью ячейками для двух, трех и четырех переменных соответственно.

2. Разметить булево выражение, поместив в соответствующие ячейки 1.

3. Сформировать группы из 8, 4 или 2 ячеек с общими краями, формируя по возможности группы максимального размера. (Заметим, что ячейка, содержащая 1, может быть использована при формировании группы чаще одного раза. Отметим также, что каждая ячейка, содержащая 1, должна быть использована хотя бы один раз.)

4. Булево выражение группы определяется переменными, общими для всех ячеек группы.

Пример. Упростить выражение $\overline{P} \cdot \overline{Q} + \overline{P} \cdot Q$, используя карты Карно.

Следуем описанной выше процедуре:

а) Составляем матрицу для двух переменных, показанную в **Табл. 8.8**.

б) Член $\overline{P} \cdot \overline{Q}$ отмечаем 1 в левой верхней ячейке, соответствующей $P = 0$ и $Q = 0$; член $\overline{P} \cdot Q$ отмечаем 1 в левой нижней ячейке, соответствующей $P = 0$ и $Q = 1$.

в) Две ячейки, содержащие 1, имеют общий горизонтальный край; таким образом, формируется вертикальная пара, отмеченная пунктиром.

г) Общая переменная в обеих ячейках — это $P = 0$, т. е. $\overline{P}$; таким образом,

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} + \overline{P} \cdot Q = \overline{P}.$$

Таблица 8.8

Q \ P	0	1
0	1	0
1	1	0

Таблица 8.9

Z \ X·Y	0·0	0·1	1·1	1·0
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Пример. Упростить $\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot Z$, используя карты Карно.

Следуем описанной выше процедуре:

а) Матрица трех переменных показана в **Табл. 8.9**.

б) Единицы в ячейках матрицы соответствуют заданному выражению; например, для $\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$ имеем $X = 0$, $Y = 1$ и $Z = 0$, а следовательно, этому члену соответствует единица в ячейке в верхней строке второго столбца и так далее.

в) Можно сформировать две пары, показанные пунктирными линиями. В нижней строке может быть сформирована пара, поскольку вертикальные линии слева и справа ячеек являются общим краем.

г) Общие переменные в группе в верхней строке — это $Y = 1$, $Z = 0$, т. е. $Y \cdot \overline{Z}$, а переменные общие для группы в нижней строке — $Y = 0$, $Z = 1$, т. е. $\overline{Y} \cdot Z$.

Следовательно,

$$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot Z = Y \cdot \overline{Z} + \overline{Y} \cdot Z.$$

Таблица 8.10

R \ P·Q	0·0	0·1	1·1	1·0
0	3 2	3 2	3 1	3 1
1	4 1	4 2	3 1	4 1

а)

R \ P·Q	0·0	0·1	1·1	1·0
0	X	X		
1	X	X		X

б)

Пример. Упростить $\overline{(P + \overline{Q} \cdot R)} + \overline{(P \cdot Q + \overline{R})}$, используя карты Карно.

Член $(P + \overline{Q} \cdot R)$ соответствует ячейкам с меткой 1 в матрице из **Табл. 8.10а**, следовательно, $\overline{(P + \overline{Q} \cdot R)}$ соответствует ячейкам с меткой 2. Аналогично $(P \cdot Q + \overline{R})$ соответствует ячейкам с меткой 3 в **Табл. 8.10а**, следовательно, $\overline{(P \cdot Q + \overline{R})}$ соответствует ячейкам с меткой 4.

Выражение $\overline{(P + \overline{Q} \cdot R)} + \overline{(P \cdot Q + \overline{R})}$ соответствует ячейкам с метками 2 или 4 и обозначено в **Табл. 8.10б** иксами (X). Эти ячейки могут быть склеены, они отмечены пунктирными линиями. Общие переменные группы из четырех ячеек — это $P = 0$, т. е. $\overline{P}$, а общие переменные группы из двух ячеек — $Q = 0$, $R = 1$, т. е. $\overline{Q} \cdot R$. Итак,

$$\overline{(P + \overline{Q} \cdot R)} + \overline{(P \cdot Q + \overline{R})} = \overline{P} + \overline{Q} \cdot R.$$

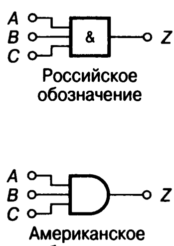
8.2. ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

8.2.1. Логические схемы

На практике логические схемы используются для реализации функций И, ИЛИ и НЕ, рассмотренных в разд. 8.1. Логические вентили могут состоять из электромеханических реле, магнитных устройств или струйных элементов, но большинство логических вентилей — это электронные устройства. Существуют различные логические вентили. Например, булево выражение $(A \cdot B \cdot C)$ может быть реализовано с использованием элемента И с тремя входами, а $(C + D)$ — с использованием элемента ИЛИ с двумя входами. Основные используемые элементы представлены ниже. Термин «вентиль» используется в том же смысле, что и обычный открывающий-закрывающий вентиль, открытое состояние характеризуется бинарной единицей, закрытое — бинарным нулем. Вентиль откроется, когда выполнены все необходимые ему условия, например «1» на выходе элемента И с двумя входами появится только в том случае, если оба входа находятся в состоянии «1».

8.2.2. Элемент И

Различные обозначения элемента И с тремя входами и таблица истинности показаны на **Рис. 8.7**. Отсюда видно, что «1» на выходе будет только в том случае, если $A = 1$, $B = 1$ и $C = 1$, что записывается как $Z = A \cdot B \cdot C$.



а)

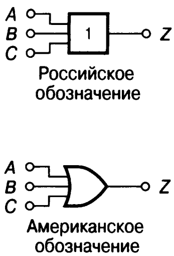
Вход			Выход
A	B	C	$Z = A \cdot B \cdot C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

Рис. 8.7

8.2.3. Элемент ИЛИ

Различные обозначения *элемента ИЛИ* с тремя входами показаны на **Рис. 8.8а**, а таблица истинности приведена на **Рис. 8.8б**. Из рисунка видно, что 1 появится на выходе только в том случае, если или $A = 1$, или $B = 1$, или $C = 1$, или любая комбинация A, B или C равна 1, т. е. $Z = A + B + C$.



а)

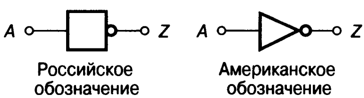
Вход A	B	C	Выход $Z = A + B + C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

б)

Рис. 8.8

8.2.4. Элемент НЕ

Различные обозначения *элемента НЕ* показаны на **Рис. 8.9а**, таблица истинности приведена на **Рис. 8.9б**. Из рисунка видно, что 0 на входе дает 1 на выходе и наоборот, т. е. это функция противоположности. Значение, противоположное A, называется НЕ-A и записывается как $\overline{A}$.



а)

Вход A	Выход $Z = \overline{A}$
0	1
1	0

б)

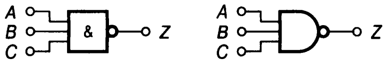
Рис. 8.9

8.2.5. Элемент И-НЕ

Различные обозначения *элемента И-НЕ* показаны на **Рис. 8.10а**, таблица истинности приведена на **Рис. 8.10б**. Данный элемент эквивалентен последовательному соединению элементов И и НЕ, и выход записывается в виде $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.

8.2.6. Элемент ИЛИ-НЕ

Различные обозначения *элемента ИЛИ-НЕ* показаны на **Рис. 8.11а**, таблица истинности приведена на **Рис. 8.11б**. Данный элемент эквивалентен последовательному соединению элементов ИЛИ и НЕ, и выход записывается в виде $Z = \overline{A + B + C}$.



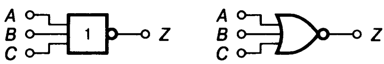
Российское обозначение   Американское обозначение

а)

Вход A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	Выход $Z = \overline{A \cdot B \cdot C}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

б)

Рис. 8.10



Российское обозначение   Американское обозначение

а)

Вход A	B	C	$A+B+C$	Выход $Z=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

б)

Рис. 8.11

8.2.7. Комбинирование логических схем

В большинстве логических схем для получения требуемого выхода требуется применить более одного вентиля. За исключением элемента НЕ, логические вентили, как правило, имеют два, три или четыре входа и реализуют только одну функцию.

Так, например, при конструировании логической схемы могут быть использованы элементы ИЛИ с двумя входами или элементы ИЛИ с четырьмя входами.

Пример. Составим логическую систему, удовлетворяющую требованию $Z = A \cdot \overline{B} + C$.

На **Рис. 8.12** элемент НЕ, обозначенный (1), дает на выходе $\overline{B}$. Элемент И, обозначенный (2), имеет на входе A и $\overline{B}$ и обеспечивает на выходе в результате $A \cdot \overline{B}$. Элемент ИЛИ, обозначенный (3), имеет на входе $A \cdot \overline{B}$ и C, а на выходе получается $\boldsymbol{Z = A \cdot \overline{B} + C}$.

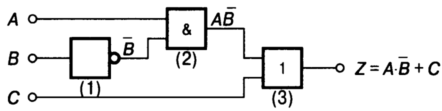


Рис. 8.12

Пример. Составить логическую схему, удовлетворяющую требованию

$$(P + \overline{Q}) \cdot (\overline{R} + S).$$

Логическая система показана на **Рис. 8.13**. Заданное выражение показывает, что для получения $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ необходимо использовать функции НЕ, их представляют элементы (1) и (2). Два элемента ИЛИ, обозначенные (3) и (4), обеспечивают $(P + \overline{Q})$ и $(\overline{R} + S)$ соответственно. Наконец, элемент И (5) обеспечивает нужный выход:

$$Z = (P + \overline{Q}) \cdot (\overline{R} + S).$$

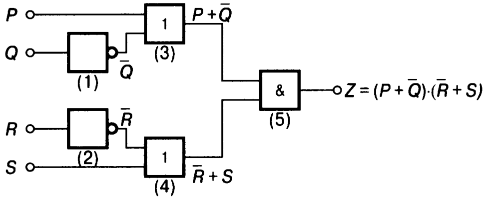


Рис. 8.13

Пример. Разработать логическую схему, удовлетворяющую требованиям к выходу из **Табл. 8.11**, используя при этом по возможности минимум элементов.

В строках 6, 7 и 8 **Табл. 8.11** на выходе получается 1; значит, булево выражение есть $Z = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$.

Логическая схема для данного выражения может быть построена при использовании трех элементов И с тремя входами, одного элемента ИЛИ с тремя входами и двух элементов НЕ. Однако требуемое число элементов можно уменьшить, используя представленные в разд. 8.1 методы, чтобы снизить стоимость схемы.

Можно использовать разные методы; в данном случае применим правила булевой алгебры (см. **Табл. 8.4**).

Таблица 8.11

Вход			Выход
A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Z = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = A\cdot[\overline{B}\cdot C + B\cdot\overline{C} + B\cdot C] =$$
$$= A\cdot[\overline{B}\cdot C + B(\overline{C} + C)] = A\cdot[\overline{B}\cdot C + B] =$$
$$= A\cdot[B + \overline{B}\cdot C] = A\cdot[B + C].$$

Логическая схема, представляющая это упрощенное выражение, представлена на **Рис. 8.14**.

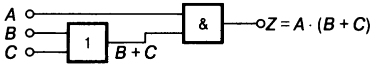


Рис. 8.14

8.2.8. Универсальные логические элементы

Функции любого из пяти логических вентилей можно реализовать, используя элементы либо И-НЕ, либо ИЛИ-НЕ; в этом случае выбранный элемент называется *универсальным*.

Пример. Показать, как можно реализовать функции НЕ, И, ИЛИ и ИЛИ-НЕ, используя только элементы И-НЕ.

Единственный вход элемента И-НЕ дает функцию НЕ, как показано на **Рис. 8.15а**. При соединении двух И-НЕ элементов, показанном на **Рис. 8.15б**, на выходе первого вентиля будет функция $\overline{A \cdot B \cdot C}$, инвертируемая вторым вентилем в $Z = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C}} = A \cdot B \cdot C$, т. е. получается функция И. Если на входе элемента И-НЕ находятся $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, на выходе получается $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$.

По закону Моргана, $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} = A + B + C$, т. е. элемент И-НЕ используется для получения функции ИЛИ. Логическая схема приведена на **Рис. 8.15в**. Если выход логической схемы с **Рис. 8.15в** инвертировать за счет добавления элемента И-НЕ, на выходе получится инвертированная функция ИЛИ, т. е. функция ИЛИ-НЕ, как показано на **Рис. 8.15г**.

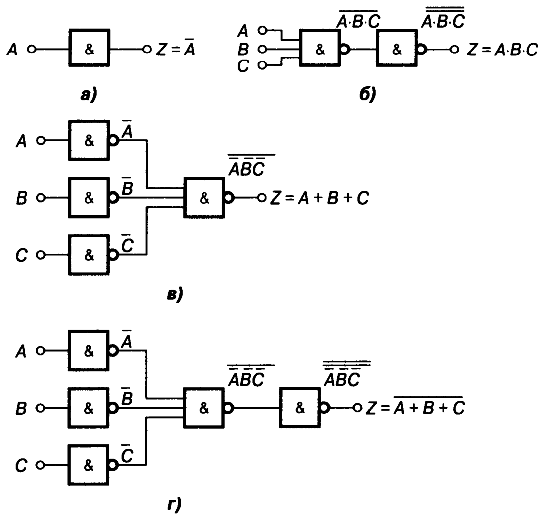


Рис. 8.15

Пример. Показать, как можно реализовать функции НЕ, И, ИЛИ и И-НЕ, используя только элементы ИЛИ-НЕ.

Единственный вход элемента ИЛИ-НЕ дает функцию НЕ, как показано на **Рис. 8.16а**. При соединении двух элементов ИЛИ-НЕ, показанном на **Рис. 8.16б**, на выходе первого элемента получается $\overline{A + B + C}$; эта функция инвертируется на втором элементе, в результате получается $Z = \overline{\overline{A + B + C}} = A + B + C$, т. е. функция ИЛИ.

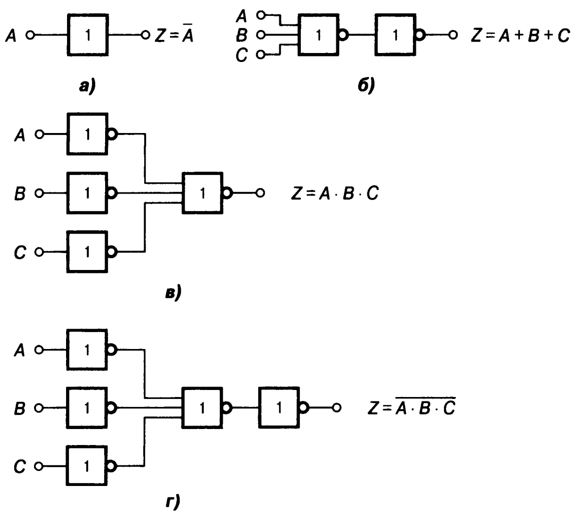


Рис. 8.16

Если на входе элемента ИЛИ-НЕ имеются $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$, тогда на выходе — $\overline{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}}$. Согласно закону Моргана, $\overline{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}} = \bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{B}}\cdot\bar{\bar{C}} = A\cdot B\cdot C$, т. е. элемент ИЛИ-НЕ можно использовать для реализации функции И. Логическая схема показана на **Рис. 8.16в**. Если выход логической схемы инвертирован за счет добавления дополнительного элемента ИЛИ-НЕ, на выходе получается инвертированная функция ИЛИ, т. е. функция ИЛИ-НЕ, как показано на **Рис. 8.16г**.

Пример. Используя элементы ИЛИ-НЕ с числом входов не более трех, разработать логическую схему, реализующую булево выражение

$$\bar{Z}=\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D}.$$

При разработке логических схем часто бывает проще начинать с выхода схемы. Данное выражение показывает наличие четырех переменных, объединенных функциями ИЛИ. Из рассмотренных выше принципов следует, что если бы это выражение было реализовано элементом ИЛИ-НЕ с четырьмя входами, то его входами служили бы $\bar{\bar{A}},\bar{\bar{B}},\bar{C}$ и $\bar{\bar{D}}$, т. е. A, B, $\bar{C}$ и D. Однако в задаче требуется использовать элементы с числом входов не больше трех, поэтому две переменные следует объединить, т. е. входы элемента ИЛИ-НЕ с тремя входами, обозначенного (1) на

Рис. 8.17, это $(A \cdot B)$, $\overline{C}$ и D. Как было показано выше, функция И обеспечивается двумя последовательно соединенными элементами И-НЕ, обозначенными (2) и (3) на **Рис. 8.17**. Логическая схема, реализующая заданное выражение, показана на **Рис. 8.17**.

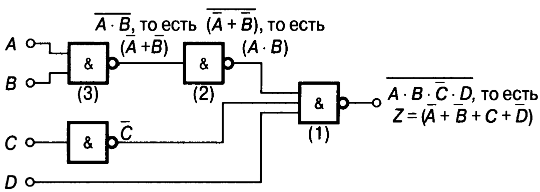


Рис. 8.17

Пример. Сигнал неисправности в мельничном комплексе должен активироваться, если: а) выключились источники питания всех мельниц, б) если загрузочные устройства наполнены менее чем на 10% и в) если работает меньше двух мельниц из трех. Разработать логическую схему, удовлетворяющую этим условиям.

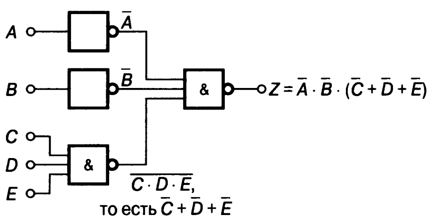


Рис. 8.18

Пусть переменная A представляет включенные для всех мельниц источники питания, тогда $\overline{A}$ представляет выключенные. Пусть B представляет заполнение загрузочных устройств более чем на 10%, тогда $\overline{B}$ представляет заполнение устройств менее чем на 10%. Пусть C, D и E представляет три работающие мельницы, тогда $\overline{C}$, $\overline{D}$ и $\overline{E}$ — это соответственно три неработающие мельницы. Искомое выражение для активации сигнала: $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + \overline{D} + \overline{E})$.

Имеются три переменные, объединенные функциями И на выходе; значит, необходим элемент И с тремя входами — $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E})$. Член $(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E})$ реализуется ИЛИ-НЕ элементом с тремя входами. Если на входах ИЛИ-НЕ элемента находятся C, D и E, тогда на выходе — $\overline{C \cdot D \cdot E}$, что по закону Моргана записывается в виде $\overline{C} + \overline{D} + \overline{E}$. Итак, искомая логическая схема показана на **Рис. 8.18**.

Глава 9

Дифференциальное исчисление

9.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

9.1.1. Введение в математический анализ

Анализ — это раздел математики, рассматривающий вычисления, связанные с непрерывно изменяющимися функциями.

Анализ делится на две части:

1. *Дифференциальное исчисление* (или *дифференцирование*).
2. *Интегральное исчисление* (или *интегрирование*).

Дифференцирование используется в вычислениях, касающихся скорости и ускорения, темпов изменения и максимальных и минимальных значений кривых.

Интегрирование может быть использовано для определения площадей, объемов, средних и среднеквадратичных величин, центров тяжести и моментов инерции.

9.1.2. Функциональное обозначение

Для уравнения вида $y = 3x^2 + 2x - 5$ говорят, что y — это функция от x, и она может быть записана в форме $y = f(x)$.

Запись уравнения в форме $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ называется *функциональным обозначением*.

Величина $f(x)$ при $x = 0$ обозначается $f(0)$, а величина $f(x)$ при $x = 2$ обозначается $f(2)$ и так далее.

Пример. Если $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, то

$$f(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 5 = -5,$$
$$f(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 5 = 11,$$
$$f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -4.$$

9.1.3. Угол наклона кривой

- Если в точке P нарисовать касательную к кривой, тогда угол наклона этой касательной называется *углом наклона кривой* в точке P. На **Рис. 9.1** угол наклона кривой в точке P равен углу наклона касательной PQ.

- Для кривой, показанной на **Рис. 9.2**, пусть точки A и B имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. В функциональных обозначениях $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

$$\text{Угол наклона хорды } AB = \frac{BC}{AC} = \frac{BD - CD}{ED} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}.$$

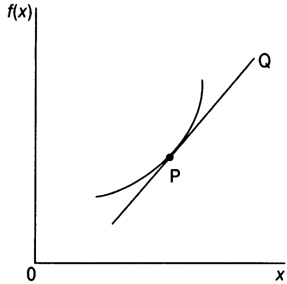


Рис. 9.1

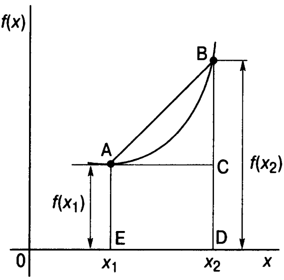


Рис. 9.2

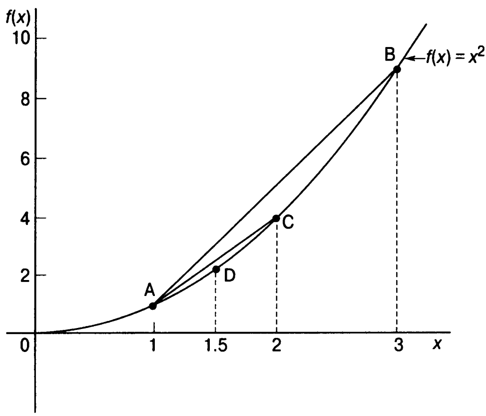


Рис. 9.3

- Для кривой $f(x) = x^2$, показанной на **Рис 9.3**:

$$\text{Угол наклона хорды } AB = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

$$\text{Угол наклона хорды } AC = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3.$$

Угол наклона хорды $AD = \dfrac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1} = \dfrac{2.25-1}{0.5} = 2.5$.

Если E — точка на кривой $(1.1, f(1.1))$, то угол наклона хорды AE равен $\dfrac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1} = \dfrac{1.21-1}{0.1} = 2.1$.

Если F — точка на кривой $(1.01, f(1.01))$, то угол наклона хорды AF равен $\dfrac{f(1.01)-f(1)}{1.01-1} = \dfrac{1.0201-1}{0.01} = 2.01$.

Таким образом, при приближении точки B к точке A тангенс угла наклона хорды приближается к значению 2. Это ***предельное значение*** тангенса угла наклона хорды AB, и, когда B совпадает с A, хорда становится касательной к кривой.

9.1.4. Определение производной

A и B на **Рис. 9.4** — это две близкие точки на кривой, δx (дельта x) и δy (дельта y) представляют малые приращения в направлениях x и y соответственно.

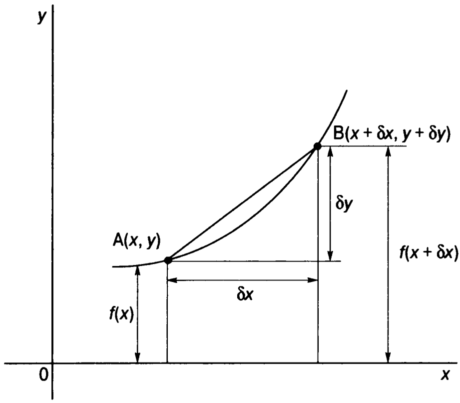


Рис. 9.4

Угол наклона хорды $AB = \dfrac{\delta y}{\delta x}$, однако $\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$.

Следовательно, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$.

Когда δx стремится к нулю, $\frac{\delta y}{\delta x}$ стремится к предельному значению и угол наклона хорды стремится к углу наклона касательной в точке A.

При определении угла наклона касательной к кривой используется два разных обозначения. Угол наклона кривой в точке A можно записать как

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \text{ или } \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}.$$

Обозначение Лейбница: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$.

Функциональное обозначение: $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}$.

$\frac{dy}{dx}$ — это то же самое, что и $f'(x)$, и называется *производной.* Процесс нахождения производной называется *дифференцированием.*

Итак, производная:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}.$$

Пример. Исходя из определения производной, продифференцировать $f(x) = x^2$ означает найти $f'(x)$ с помощью выражения $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}$.

Подставляем $(x + \delta x)$ вместо x:

$$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^2 = x^2 + 2x\delta x + \delta x^2,$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{(x^2 + 2x\delta x + \delta x^2) - x^2}{\delta x} \right\}.$$

Следовательно, $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{2x\delta x + \delta x^2}{\delta x} \right\} = \lim_{\delta x \to 0} \{2x + \delta x\}$.

При $\delta x \to 0$, $[2x + \delta x] \to [2x + 0]$. Итак, $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$, т. е. производная от x^2 — это $2x$.

Скажем, при $x = 2$ тангенс угла наклона кривой $f'(x) = 2(2) = \mathbf{4}$.

9.1.5. Дифференцирование $y = ax^n$ по общему правилу

Из определения производной следует общее правило дифференцирования функции ax^n, где a и n — любые константы. Правило таково:

> ***Если*** $y = ax^n$, ***то*** $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$,
> ***или если*** $f(x) = ax^n$, ***то*** $f'(x) = anx^{n-1}$.

Результаты дифференцирования можно выразить различными способами. Например:

- если $y = 3x^2$, то $\frac{dy}{dx} = 6x$;
- если $f(x) = 3x^2$, то $f'(x) = 6x$;
- производная $3x^2$ равна $6x$;
- $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$.

Пример. Используя общее правило, продифференцируем следующие выражения: а) $y = 5x^7$; б) $y = 3\sqrt{x}$; в) $y = \frac{4}{x^2}$.

а) Сравнивая $y = 5x^7$ и $y = ax^n$, видим, что $a = 5$ и $n = 7$. Используем общее правило:

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} = (5)(7)x^{n-1} = \mathbf{35x^6}.$$

б) $y = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, $a = 3$ и $n = \frac{1}{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} = (3)\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{\frac{3}{2\sqrt{x}}}.$$

в) $y = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$. Следовательно, $a = 4$ и $n = -2$.

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} = (4)(-2)x^{-2-1} = -8x^{-3} = -\mathbf{\frac{8}{x^3}}.$$

9.1.6. Дифференцирование синусоидальных и косинусоидальных функций

На **Рис. 9.5а** показан график функции $y = \sin\theta$. Угол наклона кривой постепенно меняется от точки O к A, B, C, D. График угла наклона дается выражением $\frac{dy}{d\theta}$, и его можно построить под графиком функции $y' = \sin\theta$, как показано на **Рис. 9.5б**.

- В 0 наклон положительный и наиболее крутой. Следовательно, 0′ — это максимальное положительное значение.
- Между 0 и A наклон положителен, но убывает по величине, и в точке A он равен нулю и обозначен A'.
- Между A и B наклон отрицательный, но возрастает по величине, и в точке B он наиболее крутой. Следовательно, B' — это наибольшее отрицательное значение.
- Если далее исследовать наклон $y = \sin\theta$ между B и C, C и D, то выяснится, что график $\frac{dy}{d\theta}$ имеет вид косинусоиды.

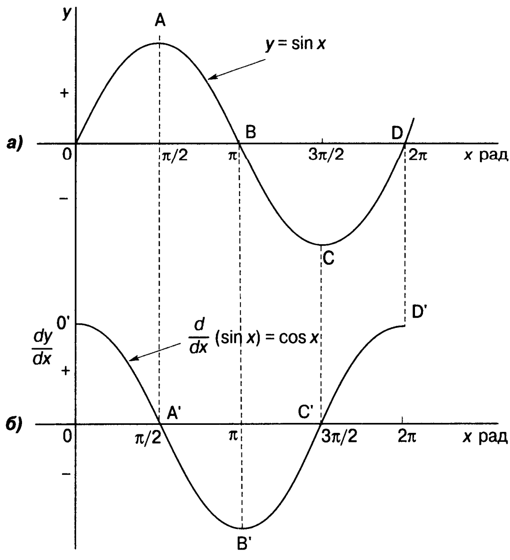


Рис. 9.5

Следовательно, производная $\sin\theta$ — это $\cos\theta$, т. е. если $y = \sin\theta$, то $\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$.

Также можно показать, что если $y = \sin a\theta$, то $\frac{dy}{d\theta} = a\cos a\theta$ (где a — константа), и если $y = \sin(a\theta + \alpha)$, то $\frac{dy}{d\theta} = a\cos(a\theta + \alpha)$ (где a и α — константы).

Если проделать аналогичные действия с $y = \cos\theta$, то получатся графики, показанные на **Рис. 9.6**, откуда видно, что $\frac{dy}{d\theta}$ — это график $\sin\theta$, смещенный на π радиан. Если каждую точку кривой $y = \sin\theta$ (показанной на **Рис. 9.5а**) отразить относительно оси x, то получится график, показанный на **Рис. 9.6б**.

Этот последний график представляет кривую $y = -\sin\theta$. Итак, если $\boldsymbol{y = \cos\theta}$, **то** $\boldsymbol{\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta}$.

Также можно показать, что

если $y = a\cos\theta$, то $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin a\theta$, где a — константа, и если $y = \cos(a\theta + \alpha)$, то $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin(a\theta + \alpha)$, где a и α — константы.

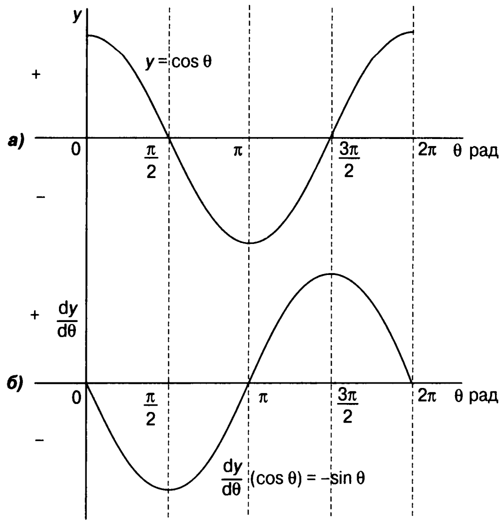


Рис. 9.6

Пример. Если $y = 7\sin 2x - 3\cos 4x$, то

$$\frac{dy}{dx} = (7)(2)\cos 2x - (3)(-4)\sin 4x = \mathbf{14\cos 2x + 12\sin 4x}.$$

Пример. Если $f(\theta) = 5\sin(100\pi\theta - 0.40)$,

$f'(\theta) = 5[100\pi\cos(100\pi\theta - 0.40)] = \mathbf{500\pi\cos(100\pi\theta - 0.40)}$.

9.1.7. Дифференцирование e^{ax} и $\ln ax$

График $y = e^x$ показан на **Рис. 9.7а**. Наклон кривой в любой точке определяется как $\frac{dy}{dx}$, и он непрерывно изменяется. Построив касательные к кривой во многих точках и измерив угол их наклона, можно получить значения $\frac{dy}{dx}$ для соответствующих значений x. Эти значения показаны графически на **Рис. 9.7б**. График зависимости $\frac{dy}{dx}$ от x идентичен исходному графику $y = e^x$. Следовательно, если $\boldsymbol{y = e^x}$, то $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = e^x}$.

Также можно показать, что если $\boldsymbol{y = e^{ax}}$, то $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = ae^{ax}}$.

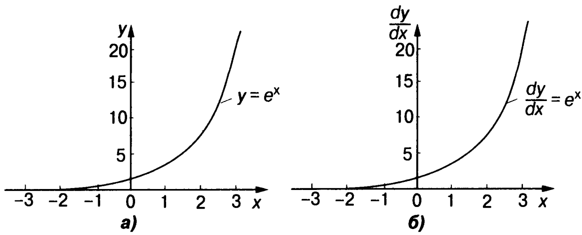


Рис. 9.7

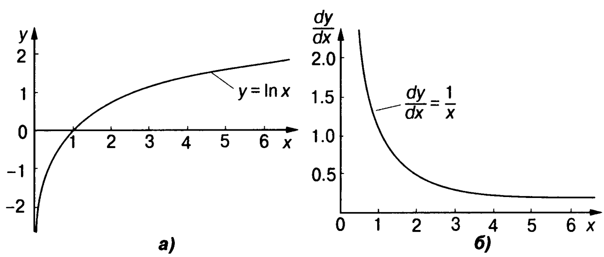


Рис. 9.8

Пример. Если $y = 2e^{6x}$, то $\frac{dy}{dx} = (2)(6e^{6x}) = 12e^{6x}$.

График $y = \ln x$ показан на **Рис. 9.8а**. Угол наклона кривой в точке, определяемый как $\frac{dy}{dx}$, постоянно меняется. Нарисовав касательные к кривой во многих точках и измерив угол их наклона, можно получить значения $\frac{dy}{dx}$ для соответствующих значений x. Эти значения показаны графически на **Рис. 9.8б**. График зависимости $\frac{dy}{dx}$ от x — это график $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Следовательно, если $\boldsymbol{y = \ln x}$, то $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$.

Также можно показать, что если $\boldsymbol{y = \ln ax}$, то $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$.

(Отметим, что в последнее выражение для $\frac{dy}{dx}$ постоянная a не входит.)

Таким образом, если $y = 3 \ln 4x$, то $\frac{dy}{dx} = (3)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

9.2. МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

9.2.1. Дифференцирование часто встречающихся функций

В разд. 9.1 были найдены *стандартные производные;* эти выражения верны для всех действительных значений x, и ниже приведена итоговая таблица производных наиболее важных функций.

y или $f(x)$	$\frac{dy}{dx}$ или $f'(x)$
ax^n	anx^{n-1}
$\sin ax$	$a \cos ax$
$\cos ax$	$-a \sin ax$
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln ax$	$\frac{1}{x}$

Пример. Продифференцировать $y = 6$.

$y = 6$ можно записать в виде $y = 6x^0$, т. е. в общем правиле $a = 6$ и $n = 0$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = (6)(0)x^{0-1} = \mathbf{0}$.

В общем случае производная константы всегда равна нулю.

Пример. Продифференцировать $y = 6x$.

Поскольку $y = 6x$, в общем правиле $a = 6$ и $n = 1$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = (6)(1)x^{1-1} = 6x^0 = \mathbf{6}$.

Пример. Найти производную от $y = 3 \sin 4x$.

Если $y = 3 \sin 4x$, то $\frac{dy}{dx} = (3)(4\cos 4x) = \mathbf{12\cos 4x}$.

В общем случае производная от kx, где k — константа, равна k.

Производная суммы или разности — это сумма или разность производных отдельных членов.

Таким образом, если $f(x) = p(x) + q(x) - r(x)$, где f, p, q и r — функции, то $f'(x) = p'(x) + q'(x) - r'(x)$.

Пример. Продифференцировать по x:

$$y = 5x^4 + 4x - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3 .$$

Запишем $y = 5x^4 + 4x - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3$ в виде

$$y = 5x^4 + 4x - \frac{1}{2}x^{-2} + x^{-1/2} - 3 .$$

Таким образом, $\dfrac{dy}{dx} = (5)(4)x^{4-1} + (4)(1)x^{1-1} - \dfrac{1}{2}(-2)x^{-2-1} +$

$$+ (1)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-1/2)-1} - 0 = 20x^3 + 4 + x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-3/2} \text{, т. е.}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dy} = 20x^3 + 4 - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}} .$$

Пример. Найти производную функции $f(\theta) = \dfrac{2}{e^{3\theta}} + 6\ln 2\theta$.

$$f(\theta) = \frac{2}{e^{3\theta}} + 6\ln 2\theta = 2e^{-3\theta} + 6\ln 2\theta .$$

Следовательно,

$$f'(\theta) = (2)(-3)e^{-3\theta} + 6\left(\frac{1}{\theta}\right) = -6e^{-3\theta} + \frac{6}{\theta} = \frac{-6}{e^{3\theta}} + \frac{6}{\theta} .$$

9.2.2. Производная произведения

Пусть $y = uv$, u и v — это функции от x. Тогда

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

Это *правило дифференцирования произведения.*

Пример. Найти производную функции $y = 3x^2 \sin 2x$.
$y = 3x^2 \sin 2x$ — это произведение двух членов: $3x^2$ и $\sin 2x$.
Пусть $u = 3x^2$ и $v = \sin 2x$.

Используем правило дифференцирования произведения:

$$\begin{array}{rccccccc}
 & \dfrac{dy}{dx} & = & u & \dfrac{dv}{dx} & + & v & \dfrac{du}{dx} \\
 & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\text{получаем:} & \dfrac{dy}{dx} & = & (3x^2) & (2\cos 2x) & + & (\sin 2x) & (6x)
\end{array}$$

То есть $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2\cos 2x + 6x\sin 2x = \mathbf{6x\,(x\cos 2x + \sin 2x)}$.

Отметим, что производную произведения ***нельзя*** найти, просто продифференцировав каждый сомножитель и перемножив результаты.

9.2.3. Дифференцирование частного

Если $y = \dfrac{u}{v}$, при этом u и v — функции от x, тогда

$$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$$

Это *правило дифференцирования частного*.

Пример. Найти производную функции $y = \dfrac{4\sin 5x}{5x^4}$.

$\dfrac{4\sin 5x}{5x^4}$ — это частное. Пусть $u = 4\sin 5x$ и $v = 5x^4$.

(Отметим, что v — это ***всегда*** знаменатель, а u — числитель.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(5x^4)(20\cos 5x) - (4\sin 5x)(20x^3)}{(5x^4)^2} =$$

$$= \frac{100x^4\cos 5x - 80x^3\sin 5x}{25x^8} = \frac{20x^3[5x\cos 5x - 4\sin 5x]}{25x^8}.$$

Итак, $\mathbf{\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{4}{5x^5}(5x\cos 5x - 4\sin 5x)}$.

Отметим, что производную частного ***нельзя*** получить, просто продифференцировав каждый член в отдельности и разделив потом числитель на знаменатель.

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} ax$.

$$y = \text{tg}\, ax = \frac{\sin ax}{\cos ax}.$$

Таким образом, tg ax следует дифференцировать как частное, где $u = \sin ax$ и $v = \cos ax$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} =$$

$$= \frac{(\cos ax)(a\cos ax) - (\sin ax)(-a\sin ax)}{(\cos ax)^2} =$$

$$= \frac{a\cos^2 ax + a\sin^2 ax}{(\cos ax)^2} = \frac{a(\cos^2 ax + \sin^2 ax)}{\cos^2 ax} = \frac{a}{\cos^2 ax},$$

так как $\cos^2 ax + \sin^2 ax = 1$ (см. разд. 3.6).

Итак, $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a\sec^2 ax}$, так как $\sec^2 ax = \dfrac{1}{\cos^2 ax}$ (см. разд. 3.2).

9.2.4. Функция от функции

Часто перед дифференцированием следует сделать подстановку. Если y — это функция от x, то

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

Это ***правило нахождения производной функции от функции*** (иногда оно называется *цепное правило*).

Пример. Если $y = (3x - 1)^9$, то, сделав подстановку $u = (3x - 1)$, получим $y = u^9$, т. е. функцию «стандартного» вида.

Следовательно, $\dfrac{dy}{du} = 9u^8$ и $\dfrac{du}{dx} = 3$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 9u^8(3) = 27u^8.$$

Выражаем u в виде $(3x - 1)$, в итоге получаем $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 27(3x - 1)^8}$. Поскольку y — это функция от u, а u — функция от x, то y — функция от функции от x.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$.

$$y = \sqrt{3x^2 + 4x - 1} = (3x^2 + 4x - 1)^{1/2}.$$

Пусть $u = 3x^2 + 4x - 1$, тогда $y = u^{1/2}$.

Следовательно, $\dfrac{du}{dx} = 6x + 4$ и $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2}u^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Используем правило дифференцирования функции от функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(6x + 4) = \frac{3x + 2}{\sqrt{u}}.$$

То есть $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2}{\sqrt{(3x^2 + 4x - 1)}}$.

9.2.5. Последовательное дифференцирование

Если функция $y = f(x)$ дифференцируется по x, тогда производная имеет вид $\dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x)$. Если это выражение снова продифференцировать, вторая производная будет иметь вид $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (произносится «де квадрат игрек по де икс квадрат») или $f''(x)$ (произносится «эф два штриха от икс»). Последовательным дифференцированием можно получить производные более высокого порядка, например $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и $\dfrac{d^4y}{dx^4}$.

Пример. Если $y = 3x^4$,

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2,\ \frac{d^3y}{dx^3} = 72x,\ \frac{d^4y}{dx^4} = 72 \text{ и } \frac{d^5y}{dx^5} = 0.$$

Пример. Если $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 5$, то

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 3$$

и

$$f''(x) = 40x^3 - 24x = 4x(10x^2 - 6).$$

9.2.6. Дифференцирование гиперболических функций

Из разд. 1.13

$$\frac{d}{dx}(\text{sh}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left[\frac{e^x - (-e^{-x})}{2}\right] =$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \mathbf{ch}\ \boldsymbol{x}.$$

Если $y = \text{sh}\ ax$, где a — константа, тогда $\dfrac{dy}{dx} = a\ \text{ch}\ ax$.

$$\frac{d}{dx}\text{ch}\ x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left[\frac{e^x + (-e^{-x})}{2}\right] =$$

$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \mathbf{sh}\ \boldsymbol{x}.$$

Если $y = \text{ch}\ ax$, где a — константа, тогда $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = a\ \mathbf{sh}\ ax}$.

Используем правило дифференцирования частного для нахождения производных функций th x, sch x, csch x и cth x. Они приведены в таблице ниже.

y или $f(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x)$
sh ax	a cos ax
ch ax	a sh ax
th ax	$a\ \text{sch}^2 ax$
sch ax	$-a$ sch ax th ax
csch ax	$-a$ csch ax cth ax
cth ax	$-a\ \text{csch}^2 ax$

Например, продифференцируем по x следующие функции:

а) $y = 4\ \text{sh}\ 2x - \frac{3}{7}\ \text{ch}\ 3x$; б) $y = 5\ \text{th}\ \frac{x}{2} - 2\text{cth}\ 4x$.

а) $\dfrac{dy}{dx} = 4(2\ \text{ch}2x) - \dfrac{3}{7}(3\ \text{sh}3x) = \mathbf{8\ ch2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\dfrac{9}{7}}\ \mathbf{sh3}\boldsymbol{x}$.

б) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left(\dfrac{1}{2}\text{sch}^2\dfrac{x}{2}\right) - 2(-4\text{csch}^2 4x) = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}\mathbf{sech}^2\dfrac{x}{2} + 8\mathbf{csch}^2 4x}$.

Пример. Продифференцировать следующие функции по переменной: а) $y = 4\sin 3t\ \text{ch}\ 4t$; б) $y = \ln(\text{sh}\ 3\theta) - 4\text{ch}^2 3\theta$.

а) $y = 4\sin 3t\ \text{ch}\ 4t$ (т. е. это произведение).

$$\frac{dy}{dx} = (4\sin 3t)(4\operatorname{sh}4t) + (\operatorname{ch}4t)(4)(3\cos 3t) =$$
$$= 16\sin 3t\operatorname{sh}4t + 12\operatorname{ch}4t\cos 3t =$$
$$= \mathbf{4(4\sin 3t\operatorname{sh}4t + 3\cos 3t\operatorname{ch}4t)}.$$

б) $y = \ln(\operatorname{sh}3\theta) - 4\operatorname{ch}^2 3\theta$ (т. е. это функция от функции).

$$\frac{dy}{d\theta} = \left(\frac{1}{\operatorname{sh}3\theta}\right)(3\operatorname{ch}3\theta) - (4)(2\operatorname{ch}3\theta)(3\operatorname{sh}3\theta) =$$
$$= 3\operatorname{cth}3\theta - 24\operatorname{ch}3\theta\operatorname{sh}3\theta = \mathbf{3(cth\,3\theta - 8ch\,3\theta\,sh\,3\theta)}.$$

9.3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

9.3.1. Скорость изменения

Если величина y зависит от x, тогда скорость изменения y в зависимости от x определяется как $\frac{dy}{dx}$. Например, скорость изменения давления p в зависимости от высоты h: $\frac{dp}{dh}$.

Скорость изменения в зависимости от времени обычно называется просто «скорость изменения», а «в зависимости от времени» подразумевается. Например, скорость изменения тока i — это $\frac{di}{dt}$, скорость изменения температуры θ — это $\frac{d\theta}{dt}$, и т. д.

Пример. Закон охлаждения Ньютона имеет вид $\theta = \theta_0 e^{-kt}$, где избыточная температура в нулевой момент времени равна θ_0°C, а в момент времени t секунд равна θ°C. Определить скорость изменения температуры через 40 с при условии, что $\theta_0 = 16$°C, $k = -0.003$.

Скорость изменения температуры: $\frac{d\theta}{dt}$.

Поскольку $\theta = \theta_0 e^{-kt}$, значит, $\frac{d\theta}{dt} = (\theta_0)(-k)e^{-kt} = -k\theta_0 e^{-kt}$.

Если $\theta_0 = 16$°C, $k = -0.003$ и $t = 40$ с, то

$$\frac{d\theta}{dt} = -(-0.03)(16)e^{-(-0.03)(40)} = 0.48e^{1.2} = \mathbf{1.594\ °C/c}.$$

9.3.2. Скорость и ускорение

Если тело перемещается на расстояние x метров за время t секунд, тогда:

- **расстояние** $x = f(t)$;

- **скорость $v = f'(t)$ или $\frac{dx}{dt}$**, а это тангенс угла наклона графика зависимости расстояния от времени;
- **ускорение $a = \frac{dv}{dt} = f''$ или $\frac{d^2x}{dt}$**, а это тангенс угла наклона графика зависимости скорости от времени.

Пример. Расстояние x метров, преодолеваемое автомобилем после включения тормозов за время t секунд, задается уравнением $x = 20t - \frac{5}{3}t^2$. Найти: а) скорость автомобиля (км/ч) в момент включения тормозов, б) расстояние, пройденное машиной до остановки.

а) Расстояние $x = 20t - \frac{5}{3}t^2$, следовательно, скорость $v = \frac{dx}{dt} = 20 - \frac{10t}{3}$. В момент включения тормозов время = 0.

Значит, **скорость** $v = 20$ м/с $= \frac{20 \times 60 \times 60}{1000}$ км/ч $=$ **72 км/ч**.

Примечание. Простой переход от м/с к км/ч — умножение на 3.6.

б) Когда машина останавливается, скорость равна нулю, т. е. $v = 20 - \frac{10}{3}t = 0$, откуда $20 = \frac{10}{3}t$, получаем $t = 6$ с. Следовательно, расстояние, пройденное машиной до остановки:

$$x = 20t - \frac{5}{3}t^2 = 20(6) - \frac{5}{3}(6)^2 = 120 - 60 = \mathbf{60\ м}.$$

Пример. Угловое смещение маховика θ радиан меняется в зависимости от времени t секунд согласно уравнению $\theta = 9t^2 - 2t^3$. Найти: а) угловую скорость и ускорение маховика в момент времени $t = 1$ с, б) момент времени, в который угловое ускорение равно нулю.

а) Угловое смещение $\theta = 9t^2 - 2t^3$ рад.

Угловая скорость $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 18t - 6t^2$ рад/с.

В момент времени $t = 1$ с, $\omega = 18(1) - 6(1)^2 =$ **12 рад/с**.

Угловое ускорение $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 18 - 12t$ рад/с^2.

В момент времени $t = 1$ с, $\alpha = 18 - 12(1) =$ **6 рад/с**.

б) Когда угловое ускорение равно нулю, $18 - 12t = 0$, откуда $18 = 12t$, время $\boldsymbol{t = 1.5}$ **с**.

9.3.3. Экстремумы

На **Рис. 9.9** наклон (крутизна) кривой меняется с положительной между O и P на отрицательную между P и Q, а затем опять на положительную между Q и R. В точке P наклон нулевой, а при увеличении x наклон меняется с положительного до P на отрицательный после. Подобные точки называют *точками максимума,* это «гребень волны». В точке Q наклон нулевой, и при увеличении x наклон кривой меняется с отрицательного до Q на положительный после. Подобные точки называют *точками минимума*, это «дно». Такие точки, как P и Q, имеют общее название — *экстремумы.*

Может существовать точка с нулевым наклоном, для которого наклон с обеих его сторон будет иметь один и тот же знак. Подобные точки имеют специальное название — *точки перегиба,* примеры такой точки приведены на **Рис. 9.10**.

Точки максимума, минимума и точки перегиба имеют общее название — ***точки покоя.***

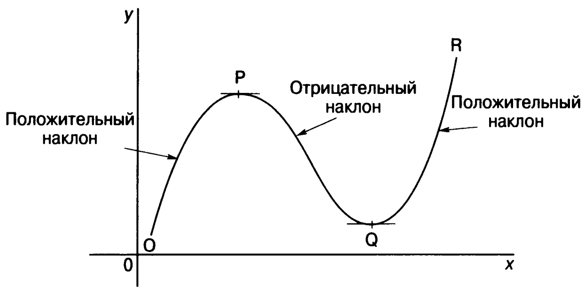


Рис. 9.9

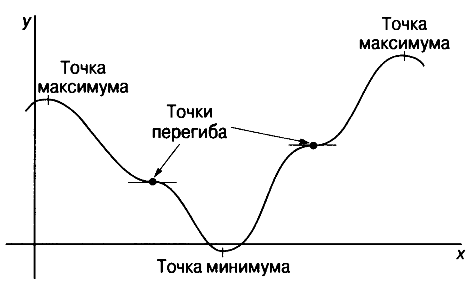


Рис. 9.10

9.3.4. Процедура нахождения и классификации точек покоя

1. По заданной функции $y = f(x)$ определяем $\frac{dy}{dx}$ (т. е. $f'(x)$).

2. Запишем уравнение $\frac{dy}{dx} = 0$ и решим его для определения значений x.

3. Подставляем значения x в исходное уравнение $y = f(x)$ для определения значений y. Так мы находим значения точек покоя. Определяем природу точек покоя, что можно сделать двумя способами.

Способ 1. Находим $\frac{d^2y}{dx^2}$ и подставляем туда значения x из п. 2.

Если результат:
а) положительный — значит, это точка минимума,
б) отрицательный — значит, это точка максимума,
в) нулевой — значит, это точка перегиба.

Способ 2. Определяем знак наклона кривой до и после точек покоя. Если перемена знака:

а) с положительного на отрицательный — точка максимума,
б) с отрицательного на положительный — точка минимума.
в) с положительного на положительный или с отрицательного на отрицательный — точка перегиба.

Пример. Найти максимум и минимум кривой $y = x^3 - 3x + 5$.

$y = x^3 - 3x + 5$, значит, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$. Для максимального и минимального значения $\frac{dy}{dx} = 0$. Следовательно, $3x^2 - 3 = 0$, откуда $3x^2 = 3$ и $x = \pm 1$.

При $x = 1$ имеем $y = (1)^3 - 3(1) + 5 = 3$.

При $x = -1$ имеем $y = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = 7$.

Следовательно, (1, 3) и (–1, 7) — координаты экстремумов.

Шаг 1. Рассмотрим точку (1, 3).

Если x немного меньше 1, скажем, 0.9, тогда $\frac{dy}{dx} = 3(0.9)^2 - 3$, это отрицательная величина. Если x немного больше 1, скажем, 1.1, тогда $\frac{dy}{dx} = 3(1.1)^2 - 3$, это положительная величина. Поскольку наклон меняется с положительного на отрицательный, значит, **точка (1, 3) — минимум**.

Шаг 2. Рассмотрим точку (–1, 7).

Если x немного меньше -1, скажем, -1.1, тогда $\frac{dy}{dx} = 3(-1.1)^2 - 3$, это положительная величина. Если x немного больше -1, скажем, -0.9, тогда $\frac{dy}{dx} = 3(-0.9)^2 - 3$, это отрицательная величина. Поскольку наклон меняется с положительного на отрицательный, **точка (–1, 7) — максимум**.

Поскольку $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$, значит, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$. Если $x = 1$, то $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ имеет положительную величину, следовательно, $(1, 3)$ — **минимум**. Если $x = -1$, то $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, следовательно, $(-1, 7)$ — **максимум**.

Итак, максимальное значение 7, минимальное значение 3.

Можно видеть, что определение природы точек покоя методом второй производной в данном случае быстрее и проще, чем исследование наклона.

9.3.5. Решение практических задач с использованием максимальных и минимальных значений

В науке и инженерной практике существует множество ***практических задач***, связанных с определением минимальных и максимальных значений. Обычно требуется найти уравнение, исходя из некоторых данных, и по необходимости преобразовать его таким образом, чтобы оно содержало только одну переменную.

Пример. Найти площадь наибольшего прямоугольного участка земли, который может быть огорожен 100 м забора; в качестве одной стороны используется готовая стена.

Пусть размеры прямоугольника — x на y, как показано на **Рис. 9.11**, где PQ — стена. Из **Рис. 9.11**,

$$x + 2y = 100. \qquad (1)$$

Площадь прямоугольника находится по формуле

$$A = xy. \qquad (2)$$

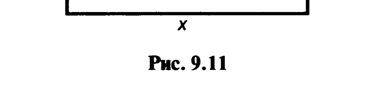


Рис. 9.11

Поскольку требуется найти максимальную площадь, формула площади A должна определяться только одной переменной. Из уравнения (1) получим $x = 100 - 2y$. Следовательно,

$$\mathbf{A = xy = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2.}$$

$\frac{dA}{dy} = 100 - 4y = 0$ для точки покоя, откуда $y = 25$ м.

$\frac{d^2A}{dy^2} = -4$, это отрицательная величина, значит, найденное значение — максимальное. При $y = 25$ м имеем $x = 50$ м из уравнения (1).

Следовательно, максимально возможная площадь равна

$$A = xy = (50)(25) = \mathbf{1250\ м^2}.$$

Пример. Открытая прямоугольная коробка с квадратными торцами имеет крышку, которая закрывает ее верх и переднюю сторону. Определить максимальный объем коробки, если для нее использовано 6 м^2 металла.

Прямоугольная коробка с квадратными торцами с длиной ребра x и длиной передней стороны y показана на **Рис. 9.12**.

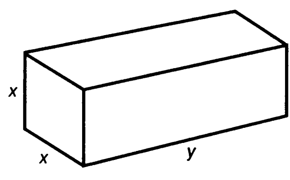


Рис. 9.12

Площадь поверхности коробки A состоит из двух квадратных торцов и пяти прямоугольных сторон (поскольку крышка покрывает также переднюю сторону).

Следовательно,

$$A = 2x^2 + 5xy = 6. \tag{1}$$

Поскольку ищется максимальный объем, необходимо составить формулу объема, зависящую только от одной переменной. Объем коробки $V = x^2y$.

Из уравнения (1)

$$y = \frac{6 - 2x^2}{5x} = \frac{6}{5x} - \frac{2x}{5}. \qquad (2)$$

Следовательно, $V = x^2 y = x^2\left(\frac{6}{5x} - \frac{2x}{5}\right) = \frac{6x}{5} - \frac{2x^3}{5}$.

$\frac{dV}{dx} = \frac{6}{5} - \frac{6x^2}{5} = 0$ для максимального или минимального значения.

Следовательно, $6 = 6x^2$, значит, $x = 1$ м ($x = -1$ физического смысла не имеет, поэтому им пренебрегаем). $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-12x}{5}$.

Если $x = 1$, то $\frac{d^2V}{dx^2}$ имеет отрицательное значение, значит, это максимум. Из уравнения (2): при $x = 1$ имеем $y = \frac{6}{5(1)} - \frac{2(1)}{5} = \frac{4}{5}$.

Следовательно, максимальный объем коробки определяется как

$$V = x^2 y = (1)^2\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}\ \text{м}^3.$$

9.3.6. Касательные и нормали

Касательные

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

где $m = \frac{dy}{dx}$ и в свою очередь равно тангенсу угла наклона кривой в точке (x_1, y_1).

Пример. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^2 - x - 2$ в точке $(1, -2)$.

$$\text{Наклон } m = \frac{dy}{dx} = 2x - 1.$$

В точке $(1, -2)$, $x = 1$ и $m = 2(1) - 1 = 1$. Следовательно, уравнение касательной $y - y_1 = m(x - x_1)$, т. е.

$$y - (-2) = 1(x - 1),$$
$$y + 2 = x - 1,$$
$$\mathbf{y = x - 3}.$$

График $y = x^2 - x - 2$ показан на **Рис. 9.13**. Прямая AB — это касательная к кривой в точке C, т. е. $(1, -2)$, и уравнение этой прямой $y = x - 3$.

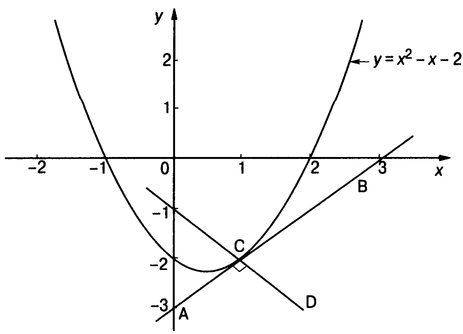


Рис. 9.13

Нормали

Нормаль в любой точке кривой — это прямая, проходящая через точку под прямым углом к касательной. Следовательно, прямая CD на **Рис. 9.13** — это нормаль.

Можно показать, что если две линии пересекаются под прямым углом, то произведение их тангенсов углов наклона равно -1. Таким образом, если m — тангенс угла наклона касательной, то тангенс угла наклона нормали $-\frac{1}{m}$.

Следовательно, уравнение нормали в точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)}$$

Пример. Найти уравнение нормали $y = x^2 - x - 2$ к кривой в точке $(1, -2)$.

$m = 1$, следовательно, уравнение нормали есть

$$y-(-2) = -\frac{1}{1}(x-1),$$

т. е. $y + 2 = -x + 1$, или $\mathbf{y = -x - 1}$.

9.3.7. Малые приращения

Если y — функция от x, т. е. $y = f(x)$, и малое приращение y соответствует малому приращению x — δx, то:

$$\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

и

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\delta x, \text{ или } \delta y \approx f'(x)\delta x \ .$$

Пример. Период колебаний маятника определяется как $T = k\sqrt{l}$, где k — константа. Найдем изменение периода колебаний в процентах, если длина маятника l меняется от 32.1 до 32.0 см.

Если $T = k\sqrt{l} = kl^{1/2}$, то $\frac{dT}{dl} = k\left(\frac{1}{2}l^{1/2}\right) = \frac{k}{2\sqrt{l}}$.

Соответствующее изменение T, $\delta t \approx \frac{dT}{dl}\delta l \approx \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)\delta l \approx$

$\approx \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)(-0.1)$ (величина отрицательная, поскольку l уменьшается).

$$\text{Ошибка в процентах} = \left(\frac{\text{Приблизительное изменение } T}{\text{Исходная величина}}\right) 100\,\% =$$

$$= \frac{\left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)(-0.1)}{k\sqrt{l}} \times 100\,\% = \left(\frac{-0.1}{2l}\right)100\,\% = \left(\frac{-0.1}{2(32.1)}\right)100\% = \mathbf{-0.156\%}.$$

Следовательно, период колебаний уменьшается на 0.156%.

9.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

9.4.1. Введение

Некоторые математические функции можно упростить, выразив отдельно, скажем, x и y через некую третью переменную. Например, $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$. Тогда любое заданное значение θ будет давать пару значений x и y, по которым можно построить кривую $y = f(x)$.

Третья переменная θ называется *параметром,* а выражения для x и y — *параметрическими уравнениями.*

В рассмотренном примере $y = r\sin\theta$ и $x = r\cos\theta$ — это параметрические уравнения окружности. Уравнение для любой точки на окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Покажем, что $y = r\sin\theta$ и $x = r\cos\theta$ — параметрические уравнения такой окружности.

Докажем, что левая часть уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ равна правой части:

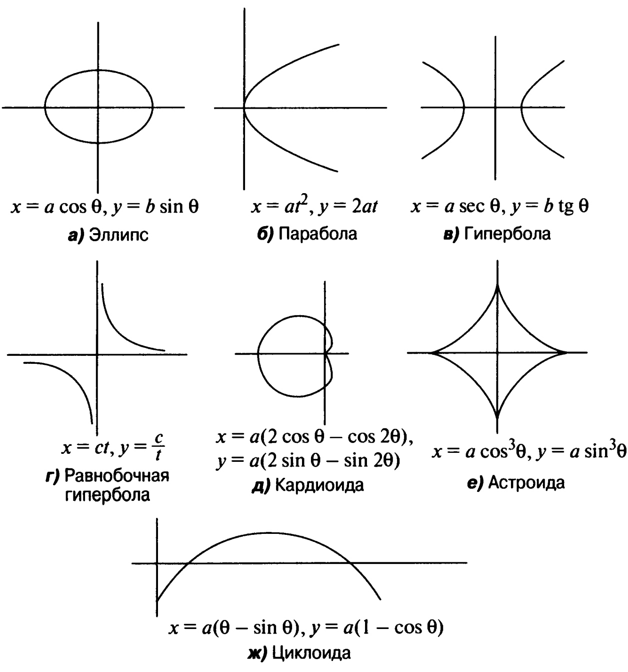
$$x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

(поскольку $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$).

Итак, левая часть уравнения равна правой, что и требовалось доказать.

9.4.2. Некоторые стандартные параметрические уравнения

На **Рис. 9.14** показаны формы некоторых кривых, приведены их стандартные параметрические уравнения.



$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
а) Эллипс

$x = at^2,\ y = 2at$
б) Парабола

$x = a\sec\theta,\ y = b\operatorname{tg}\theta$
в) Гипербола

$x = ct,\ y = \frac{c}{t}$
г) Равнобочная гипербола

$x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta),$
$y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$
д) Кардиоида

$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$
е) Астроида

$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$
ж) Циклоида

Рис. 9.14

9.4.3. Дифференцирование по параметру

Если x и y заданы через общий параметр, например θ, то, согласно правилу дифференцирования функции от функции,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}.$$

Данное выражение может быть записано в виде

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}} \qquad (1)$$

Вторая производная, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$, или

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}} \qquad (2)$$

Пример. При условии, что $x = 5\theta - 1$ и $y = 2\theta(\theta - 1)$, найти $\frac{dy}{dx}$ как функцию θ.

$x = 5\theta - 1$, следовательно, $\frac{dx}{d\theta} = 5$; $y = 2\theta(\theta - 1) = 2\theta^2 - 2\theta$.

Следовательно, $\frac{dy}{d\theta} = 4\theta - 2 = 2(2\theta - 1)$.

Из уравнения (1), $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2(2\theta - 1)}{5}$, или $\mathbf{\frac{2}{5}(2\theta - 1)}$.

Пример. При нахождении поверхностного натяжения жидкости радиус кривизны ρ части поверхности определяется как

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Найти радиус кривизны части поверхности, характеризуемой параметрическими уравнениями $x = 3t^2$, $y = 6t$, в точке $t = 2$.

$x = 3t^2$, следовательно, $\dfrac{dx}{dt} = 6t$ и $y = 6t$; значит, $\dfrac{dy}{dt} = 6$.

Из уравнения (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{6}{6t} = \dfrac{1}{t}$.

Из уравнения (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t}\right)}{6t} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}(t^{-1})}{6t} = \dfrac{-t^{-2}}{6t} =$

$= \dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{6t} = \dfrac{-1}{6t^3}$. Следовательно, радиус кривизны

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2\right]^3}}{\frac{-1}{6t^3}}.$$

При $t = 2$, $\rho = \dfrac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3}}{-\dfrac{1}{6(2)^3}} = \dfrac{\sqrt{(1.25)^3}}{-\dfrac{1}{48}} =$

$$= -48\sqrt{1.25^3} = -48 = \mathbf{-67.08}.$$

9.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

9.5.1. Неявные функции

Если уравнение может быть записано в виде $y = f(x)$, говорят, что это *явная функция* от x. Примеры явных функций включают: $y = 2x^3 - 3x$, $y = 2\ln x$ и $y = \dfrac{3e^x}{\cos x}$. В этих примерах y можно продифференцировать по x, используя стандартные производные и правила дифференцирования произведения и частного.

Иногда в уравнениях, содержащих, скажем, x и y, нельзя сделать искомым y. Тогда говорят, что уравнение задает *неявную функцию*; примеры таких уравнений: $y^3 + 2x^2 = y^2$ и $\sin y = x^2 + 2xy$.

9.5.2. Дифференцирование неявных функций

Можно ***продифференцировать неявную функцию***, используя ***правило дифференцирования функции от функции***:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx}.$$

Так, чтобы продифференцировать y^3 по x, необходимо сделать подстановку $u = y^3$, откуда $\frac{du}{dy} = 3y^2$. Следовательно, $\frac{d}{dx}(y^3) = (3y^2) \times \frac{dy}{dx}$, согласно правилу дифференцирования функции от функции.

Простое правило дифференцирования неявных функций выглядит следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(y)] = \frac{d}{dy}[f(y)] \times \frac{dy}{dx}} \qquad (1)$$

Пример. Продифференцировать $u = \sin 3t$ по x.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\sin 3t) \times \frac{dt}{dx} = \mathbf{3\cos 3t\frac{dt}{dx}}.$$

Пример. Продифференцировать $u = 4 \ln 5y$ по t.

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dy}(4\ln 5y) \times \frac{dy}{dt} = \left(\frac{4}{y}\right)\frac{dy}{dt}.$$

9.5.3. Дифференцирование неявных функций, содержащих произведения и частные

Правила дифференцирования произведения и частного можно применить к неявным функциям, содержащим произведения и частные двух переменных.

Пример. По правилу дифференцирования произведения и согласно уравнению (1)

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = (x^2)\frac{d}{dx}(y) + (y)\frac{d}{dx}(x^2) = (x^2)\left(1\frac{dy}{dx}\right) + y(2x) =$$

$$= \mathbf{x^2\frac{dy}{dx} + 2xy}.$$

Пример.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3y}{2x}\right) = \frac{(2x)\frac{d}{dx}(3y) - (3y)\frac{d}{dx}(2x)}{(2x)^2} = \frac{(2x)\left(3\frac{dy}{dx}\right) - (3y)(2)}{4x^2} =$$

$$= \frac{6x\frac{dy}{dx} - 6y}{4x^2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2x^2}}\left(\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} - y}\right).$$

9.5.4. Дальнейшее дифференцирование неявных функций

Неявная функция вроде $3x^2 + y^2 - 5x + y = 2$ может быть продифференцирована по x за счет дифференцирования каждого члена по отдельности. Таким образом,

$$\frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(2),$$

т. е. $6x + 2y\frac{dy}{dx} - 5 + 1\frac{dy}{dx} = 0$ (используя уравнение (1) и стандартные производные).

Выражение для производной $\frac{dy}{dx}$ относительно x и y может быть получено за счет перестановки в последнем уравнении. Таким образом, $(2y + 1)\frac{dy}{dx} = 5 - 6x$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 6x}{2y + 1}.$$

9.6. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

9.6.1. Введение в логарифмическое дифференцирование

Для некоторых функций, содержащих более сложные произведения и частные, процесс дифференцирования можно упростить, предварительно взяв логарифм функции. Подобная методика, называемая *логарифмическим дифференцированием,* требует применения:

1. Логарифмических законов.
2. Производных логарифмических функций.
3. Правил дифференцирования неявных функций.

9.6.2. Логарифмические законы

Три логарифмических закона можно выразить в виде:

1. $\log(A \times B) = \log A + \log B$.
2. $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$.
3. $\log A^n = n \log A$.

В математическом анализе неизменно используются натуральные логарифмы (т. е. логарифмы по основанию e). Таким образом, логарифмические законы могут быть выражены для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ в виде:

1. $\ln[f(x) \cdot g(x)] = \ln f(x) + \ln g(x)$.
2. $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln f(x) - \ln g(x)$.
3. $\ln[f(x)]^n = n \ln f(x)$.

Извлекая натуральный логарифм из обеих частей уравнения $y = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$, получаем $\ln y = \ln\left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}\right)$, что можно упростить, используя рассмотренные выше логарифмические законы:

$$\ln y = \ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x).$$

Уравнение в такой форме зачастую проще дифференцировать.

9.6.3. Дифференцирование логарифмических функций

Производная логарифмической функции $\ln x$ определяется следующим образом:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

В более общей форме можно показать, что

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (1)$$

Пример. Если $y = \ln(3x^2 + 2x - 1)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$.

Пример. Если $y = \ln(\sin 3x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} = 3\operatorname{ctg} 3x$. Используем правило дифференцирования функции от функции из разд. 9.5:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Пример. Функцию $y = \dfrac{(1+x)^2\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x+2)}}$ можно продифференцировать, используя правила дифференцирования произведения и частного, однако это будет довольно сложно. При использовании логарифмического дифференцирования проводим следующую процедуру.

1. Излекаем натуральный логарифм из обеих частей уравнения:

$$\ln y = \ln\left\{\frac{(1+x)^2\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x+2)}}\right\} = \ln\left\{\frac{(1+x)^2(x-1)^{1/2}}{x(x+2)^{1/2}}\right\}.$$

2. Применяем логарифмические законы:

$\ln y = \ln(1+x)^2 + \ln(x-1)^{1/2} - \ln x - \ln(x+2)^{1/2}$, согласно законам 1 и 2.

То есть $\ln y = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2)$, согласно закону 3.

3. Дифференцируем каждый член по x, используя уравнения (1) и (2):

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1+x)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)}.$$

4. Решаем уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{2}{(1+x)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+2)}\right\}.$$

5. Подставляем y, выраженное через x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x+2)}}\left\{\frac{2}{(1+x)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+2)}\right\}.$$

9.6.4. Дифференцирование $[f(x)]^x$

Если выражение, которое надо продифференцировать, содержит член в степени, являющейся функцией той же переменной, следует использовать логарифмическое дифференцирование. Например, продифференцировать выражения типа x^x, $(x+2)^x$, $\sqrt[x]{(x-1)}$ и $3x^{3x+2}$ можно только с помощью логарифмического дифференцирования.

Пример. Найти $\frac{dy}{dx}$ для функции $y = x^x$.

Извлекаем натуральный логарифм из обеих частей уравнения $y = x^x$. Получим $\ln y = \ln x^x = x \ln x$, согласно закону 3.

Дифференцируем обе части уравнения по x:

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$, согласно правилу дифференцирования произведения.

То есть $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$, откуда $\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x).$$

9.7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

9.7.1. Обратные функции

Если $y = 3x - 2$, то после перестановки $x = \frac{y+2}{3}$. Функция $x = \frac{y+2}{3}$ называется функцией, *обратной функции* $y = 3x - 2$.

Обратные тригонометрические функции обозначают приставкой «arc». Например, если $y = \sin x$, тогда $x = \arcsin y$. Аналогично, если $y = \cos x$, тогда $x = \arccos y$ и так далее. Или же, если $y = \sin x$, $x = \sin^{-1}x$. Графики трех обратных тригонометрических функций показаны на **Рис. 9.15**.

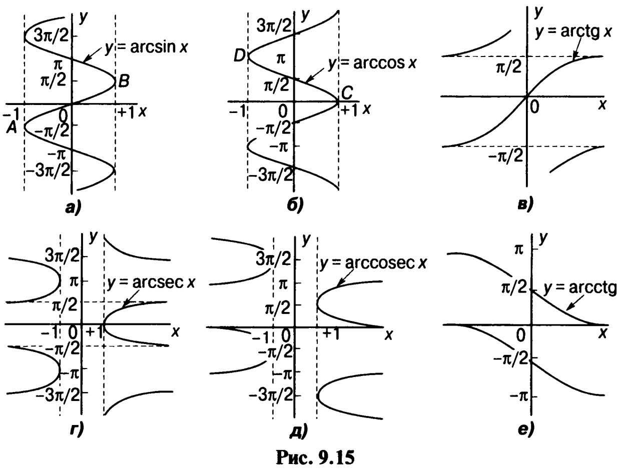


Рис. 9.15

Обратные гиперболические функции обозначают приставкой «ar». Например, если $y = \operatorname{sh} x$, тогда $x = \operatorname{arsh} y$. Аналогично, если $y = \operatorname{sch} x$, тогда $x = \operatorname{arsch} x$ (или $x = \operatorname{arsech} x$) и так далее. Или же $y = \operatorname{sh} x$, тогда $x = \operatorname{sh}^{-1} x$. Графики обратных гиперболических функций показаны на **Рис. 9.16**.

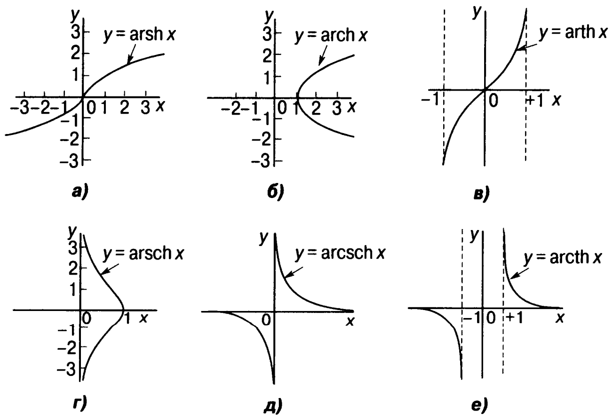


Рис. 9.16

9.7.2. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Производные обратных тригонометрических функций приведены в **Табл. 9.1**.

Таблица 9.1. *Производные обратных тригонометрических функций*

y или $f(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x)$
$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\arcsin f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
$\arccos\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\operatorname{arcos} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$

Продолжение таблицы

y или $f(x)$	**$\frac{dy}{dx}$ или $f'(x)$**
$\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\frac{a}{a^2+x^2}$
$\operatorname{arctg} f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$	$\frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$
$\operatorname{arcsec} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
$\operatorname{arccosec}\frac{x}{a}$	$\frac{-a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$
$\operatorname{arccosec} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
$\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$	$\frac{-a}{a^2+x^2}$
$\operatorname{arcctg} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{1+[f(x)]}$

Пример. Найти $\frac{dy}{dx}$ при условии, что $y = \arcsin 5x^2$.

Из **Табл. 9.1**, если $\arcsin f(x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$.

Следовательно, если $y = \arcsin 5x^2$, то $f(x) = 5x^2$ и $f'(x) = 10x$.

Итак, $\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{\sqrt{1-(5x^2)^2}} = \frac{\mathbf{10x}}{\sqrt{\mathbf{1-25x^4}}}$.

Пример. Найти производную функции $y = \ln(\arccos 3x)$.

Пусть $u = \arccos 3x$, тогда $y = \ln u$. По правилу дифференцирования произведения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \times \frac{d}{dx}(\arccos 3x) = \frac{1}{\arccos 3x}\left\{\frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right\}.$$

Итак, $\frac{d}{dx}[\ln(\arccos 3x)] = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}\arccos 3x}$.

9.7.3. Логарифмическая форма обратных гиперболических функций

Обратные гиперболические функции проще вычислить, если они записаны в ***логарифмической форме.***

Пример. Если $y = \operatorname{arsh}\frac{x}{a}$, то $\frac{x}{a} = \operatorname{sh} y$.

Из разд. 1.13 следует, что $e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$ и $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, откуда $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$, и эта величина всегда положительна, поскольку ch y всегда положителен (**Рис. 1.13** стр. 78). Следовательно,

$$e^y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} + \operatorname{sh} y =$$

$$= \sqrt{\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} + \frac{x}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}.$$

Берем натуральный логарифм от обеих частей:

$$y = \ln\left\{\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arsh}\frac{x}{a} = \ln\left\{\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right\}. \qquad (1)$$

Пример. Найти $\operatorname{arsh}\frac{3}{4}$ при $x = 3$ и $a = 4$ в уравнении (1).

Тогда $\operatorname{arsh}\frac{3}{4} = \ln\left\{\frac{3 + \sqrt{4^2 + 3^2}}{4}\right\} = \ln\left(\frac{3+5}{4}\right) = \ln 2 = 0.6931$.

Аналогично можно показать, что

$$\mathbf{arch}\frac{x}{a} = \ln\left\{\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right\} \text{ и } \mathbf{arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right).$$

Пример. Найти arch 1.4 с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Согласно сказанному выше, $\operatorname{arch}\frac{x}{a} = \ln\left\{\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right\}$ и

$\operatorname{arch} 1.4 = \operatorname{arch}\frac{14}{10} = \operatorname{arch}\frac{7}{5}$.

В уравнении $\operatorname{arch}\frac{x}{a}$ пусть $x = 7$ и $a = 5$, тогда

$\operatorname{arch}\frac{7}{5} = \ln\left\{\frac{7 + \sqrt{7^2 - 5^2}}{5}\right\} = \ln 2.3798 = \mathbf{0.867}$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

9.7.4. Дифференцирование обратных гиперболических функций

Производные обратных гиперболических функций приведены в **Табл. 9.2**.

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{arsh} 2x$.
Из **Табл. 9.2**:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arsh} f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + 1}}.$$

Следовательно, $\frac{d}{dx}(\operatorname{arsh} 2x) = \frac{2}{\sqrt{[(2x)^2 + 1]}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{[\mathbf{4x^2 + 1}]}}$.

Пример. Найти $\frac{d}{dx}[\operatorname{arch}\sqrt{(x^2 + 1)}]$.

Если $y = \operatorname{arch} f(x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\sqrt{\{[f(x)]^2 - 1\}}}$.

Если $y = \operatorname{arch}\sqrt{(x^2 + 1)}$, то $f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$ и

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arch}\sqrt{(x^2 + 1)}] = \frac{\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)}}}{\sqrt{\{[\sqrt{(x^2 + 1)}]^2 - 1\}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)}}}{\sqrt{(x^2 + 1 - 1)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}} .$$

Таблица 9.2. *Производные обратных гиперболических функций*

y **или** $f(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$ **или** $f'(x)$
$\operatorname{arsh}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
$\operatorname{arsh} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}$
$\operatorname{arch}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\operatorname{arch} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
$\operatorname{arth}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{a}{a^2-x^2}$
$\operatorname{arth} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$
$\operatorname{arsch}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{-a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$
$\operatorname{arsch} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\operatorname{arcsch}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{-a}{x\sqrt{x^2+a^2}}$
$\operatorname{arcsch} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2+1}}$
$\operatorname{arcth}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{a}{a^2-x^2}$
$\operatorname{arcth} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$

9.8. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

9.8.1. Введение в теорию частных производных

В инженерных науках бывают случаи, когда изменения одной величины зависят от изменений двух или более величин. Например, объем цилиндра V определяется как $V = \pi r^2 h$. Объем изменится при изменении радиуса r или высоты h. Формула объема может быть математически записана в виде $V = f(r, h)$, что означает V — это некоторая функция от r и h. Практическими примерами таких функций являются:

- период колебаний $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, т. е. t $t = f(l, g)$;
- вращающий момент, $T = I\alpha$, т. е. $T = f(I, \alpha)$;
- давление идеального газа, $p = \frac{mRT}{V}$, т. е. $p = f(T, V)$;
- резонансная частота, $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, т. е. $f_r = f(L, C)$ и т. д.

При дифференцировании функции двух переменных одна переменная остается постоянной, и производная по другой переменной находится относительно этой первой. Полученная производная называется *частной производной* функций.

9.8.2. Частные производные первого порядка

Буква ∂ используется для обозначения производных в выражении, содержащем более одной переменной.

Следовательно, если $V = \pi r^2 h$, то $\frac{\partial V}{\partial r}$ — это частная производная V по r при постоянном h. Таким образом, $\frac{\partial V}{\partial r} = (\pi r)\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = (\pi r)(2r) = 2\pi rh$. Аналогично $\frac{\partial V}{\partial h}$ — это частная производная V по h при постоянном r. Таким образом, $\frac{\partial V}{\partial h} = (\pi r^2)\frac{d}{\partial h}((h)) = (\pi r^2(1)) = \pi r^2$.

$\frac{\partial V}{\partial r}$ и $\frac{\partial V}{\partial h}$ — это примеры частных производных первого порядка, поскольку $n = 1$ при записи в форме $\frac{\partial^n V}{\partial r^n}$.

Частные производные первого порядка используют при определении полного дифференциала, скорости изменения и погрешностей функций двух и более переменных (разд. 9.9), а также при определении максимума, минимума и седловых точек функций двух переменных (разд. 9.10).

Пример. Если $Z = 5x^4 + 2x^3y^2 - 3y$, то

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{d}{dx}((5x^4) + (2y^2)\frac{d}{dx}((x^3))) - (3y)\frac{d}{dx}((l)) =$$

$$= 20x^3 + (2y^2)(3x^2) - (3y)(0) = \mathbf{20x^3 + 6x^2y^2}$$

и

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (5x^4)\frac{d}{dy}(1) + (2x^3)\frac{d}{dy}((y^2)) - 3\frac{d}{dy}((y)) =$$

$$= 0 + (2x^3)(2y) - 3 = \mathbf{4x^3y - 3}.$$

9.8.3. Частные производные второго порядка

Как и при дифференцировании функции одной переменной, где производную можно дифференцировать повторно, частную производную также можно дифференцировать еще раз для получения частных производных высшего порядка.

Если $V = \pi r^2 h$, то $\frac{\partial V}{\partial r} = (\pi h)\frac{d}{dr}((r^2)) = (\pi h)(2r) = 2\pi rh$ и

$$\frac{\partial V}{\partial h} = (\pi r^2)\frac{d}{dh}((h)) = (\pi r^2)(1) = \pi r^2$$

согласно предыдущему разделу.

1. Дифференцируя $\frac{\partial V}{\partial r}$ по r при постоянном h, получаем $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$, что можно записать в виде $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$.

Итак, если $V = \pi r^2 h$, то $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(2\pi rh) = 2\pi h$.

2. Дифференцируя $\frac{\partial V}{\partial h}$ по h при постоянном r, получаем $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)$, что можно записать в виде $\frac{\partial^2 V}{\partial h^2}$. Итак,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = \frac{\partial}{\partial h}(\pi r^2) = 0.$$

3. Дифференцируя $\frac{\partial V}{\partial h}$ по r при постоянном h, получаем $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)$, что можно записать в виде $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h}$. Итак,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(\pi r^2) = 2\pi r.$$

4. Дифференцируя $\frac{\partial V}{\partial r}$ по h при постоянном r, получаем $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$, что можно записать в виде $\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r}$. Итак,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial h}(2\pi r h) = 2\pi r.$$

5. $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial h^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r}$ — это примеры *частных производных второго порядка.*

Из п. 3, 4 видно, что $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h} = \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r}$, и подобный результат всегда верен для непрерывных функций (т. е. функций, график которых не имеет скачков и разрывов).

Частные производные второго порядка используются при решении уравнений в частных производных, в теории волноводов, в разделах термодинамики, связанных с энтропией и теоремой непрерывности, а также при нахождении максимумов, минимумов и седловых точек функций двух переменных (разд. 9.10).

Пример. Найти: а) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$; б) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$; в) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$; г) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$, если задано, что $Z = 4x^2y^3 - 2x^3 + 7y^2$.

а) $\frac{\partial Z}{\partial x} = 8xy^3 - 6x^2$,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(8xy^3 - 6x^2) = \mathbf{8y^3 - 12x}.$$

б) $\frac{\partial Z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 14y$,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^2 + 14y) = \mathbf{24x^2y + 14}.$$

в) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^2 + 14y) = \mathbf{24xy^2}.$

г) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(8xy^3 - 6x^2) = \mathbf{24xy^2}.$

9.9. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ, СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ И ПРИРАЩЕНИЯ

9.9.1. Полный дифференциал

В разд. 9.8 представлены частные производные для случая, когда только одна переменная изменяется во времени, остальные переменные остаются постоянными. На практике все переменные могут изменяться одновременно.

Если $Z=f(u, v, w, ...)$, то *полный дифференциал* dZ определяется как сумма частных дифференциалов функции Z:

$$\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial u}du + \frac{\partial Z}{\partial v}dv + \frac{\partial Z}{\partial w}dw + \ldots} \qquad (1)$$

Пример. Если $Z=f(u, v, w)$ и $Z = 3u^2 - 2v + 4w^3v^2$, то полный дифференциал есть $dZ = \frac{\partial Z}{\partial u}du + \frac{\partial Z}{\partial v}dv + \frac{\partial Z}{\partial w}dw$.

$\frac{\partial Z}{\partial u} = 6u$ (т. е. v и w остаются постоянными),

$\frac{\partial Z}{\partial v} = -2 + 8w^3v$ (т. е. u и w остаются постоянными),

$\frac{\partial Z}{\partial w} = 12w^2v^2$ (т. е. u и v остаются постоянными).

Следовательно, $\mathbf{dZ = 6udu + (8vw^3 - 2)dv + (12v^2w^2)dw}$.

9.9.2. Скорость изменения

Иногда необходимо найти решение задачи, в которой разные величины имеют разные *скорости изменения*. Из уравнения (1) скорость изменения Z, т. е. $\frac{dZ}{dt}$, находится из выражения

$$\boxed{\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \ldots} \qquad (2)$$

Пример. Если высота прямого кругового конуса увеличивается на 3 мм/с, а радиус уменьшается на 2 мм/с, то скорость изменения его объема (в см^3/с) при высоте 3.2 см и радиусе 1.5 см определяется следующим образом:

Объем прямого кругового конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Используя уравнение (2), находим скорость изменения объема:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi rh \text{ и } \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2.$$

Поскольку высота увеличивается на 3 мм/с, т. е. на 0.3 см/с, то $\frac{dh}{dt} = +0.3$, а поскольку радиус уменьшается на 2 мм/с, т. е. на 0.2 см/с, то $\frac{dr}{dt} = -2$. Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{2}{3}\pi rh\right)(-0.2) + \left(\frac{1}{3}\pi r^2\right)(+0.3) = \frac{-0.4}{3}\pi rh + 0.1\pi r^2.$$

Однако $h = 3.2$ см и $r = 1.5$ см. Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-0.4}{3}\pi(1.5)(3.2) + (0.1)\pi(1.5)^2 =$$

$$= -2.011 + 0.707 = -1.304 \text{ см}^3/\text{с}.$$

Таким образом, объем конуса уменьшается со скоростью 1.30 см^3/с.

9.9.3. Малые приращения

Часто бывает полезно найти приблизительную величину изменения (погрешность) величины, вызванную *малыми приращениями* (или погрешностями) переменных, связанных с этой величиной. Если $Z = f(u, v, w, ...)$ и δu, δv, δw, ... означают малые приращения u, v, w, ... соответственно, то соответствующее приблизительное значение изменения δZ для Z определяется по уравнению (1), при этом дифференциал заменяется на малые приращения. Итак,

$$\boxed{\delta Z \approx \frac{\partial Z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial Z}{\partial v}\delta v + \frac{\partial Z}{\partial w}\delta w + \ldots} \tag{3}$$

Пример. Если модуль упругости при кручении $G = (R^4\theta)/L$, где R — радиус вала, θ — угол кручения вала, L — длина, то погрешность G в процентах при увеличении R на 2%, уменьшении θ на 5% и увеличении L на 4 % определяется так:

Из уравнения (3): $\delta G \approx \frac{\partial G}{\partial R}\delta R + \frac{\partial G}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial G}{\partial L}\delta L$.

Поскольку $G = \frac{R^4\theta}{L}$, то $\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{4R^3\theta}{L}$, $\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{R^4}{L}$ и $\frac{\partial G}{\partial L} = \frac{-R^4\theta}{L^2}$.

Так как R возрастает на 2%, $\delta R = \frac{2}{100}R = 0.02R$. Аналогично $\delta\theta = -0.05\theta$ и $\delta L = 0.04L$. Следовательно,

$$\delta G \approx \left(\frac{4R^3\theta}{L}\right)(0.02R) + \left(\frac{R^4}{L}\right)(-0.05\theta) + \left(-\frac{R^4\theta}{L^2}\right)(0.04L) \approx$$

$$\approx \frac{R^4\theta}{L}[0.08 - 0.05 - 0.04] \approx -0.01\frac{R^4\theta}{L}.$$

То есть $\delta G \approx -\frac{1}{100}G$.

Следовательно, приблизительная процентная погрешность G — уменьшение на 1%.

9.10. ЭКСТРЕМУМЫ И СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.10.1. Функции двух независимых переменных

Если связь между двумя переменными x и y такова, что по заданному значению x можно определить величину y, то говорят, что y — функция от x, и ее обозначают $y = f(x)$; x называют независимой переменной, y — зависимой.

Если $y = f(u, v)$, то говорят, что y — функция двух независимых переменных u и v. Например, если, скажем, $y = f(u, v) = 3u^2 - 2v$, то при $u = 2$, $v = 1$, $y = 3(2)^2 - 2(1) = 10$. Это можно записать в виде $f(2, 1) = 10$. Аналогично при $u = 1$, $v = 4$, $f(1, 4) = -5$.

Рассмотрим функцию двух переменных x и y, заданную в виде $z = f(x, y) = 3x^2 - 2y$. Если $(x, y) = (0, 0)$, то $f(0, 0) = 0$, а если $(x, y) = (2, 1)$, то $f(2, 1) = 10$. Каждая пара чисел (x, y) может быть представлена в виде точки P в плоскости (x, y) декартовой системы координат, как показано на **Рис. 9.17**. Соответствующее значение $z = f(x, y)$ может быть представлено отрезком PP′, нарисованным параллельно оси z. Таким образом, если, например, $z = 3x^2 - 2y$, и координаты точки P — (2, 3), тогда длина PP′ составляет $3(2)^2 - 2(3) = 6$. На примере **Рис. 9.18** показано, что если задать большее количество координат (x, y) для функции $f(x, y)$, а затем вычислить значение $f(x, y)$ для каждой координаты, то можно построить большее количество подобных PP′ отрезков. И если взять в плоскости (x, y) все точки, получается поверхность, показанная на **Рис. 9.18**.

Таким образом, функция $z = f(x, y)$ представляет собой не кривую, а поверхность.

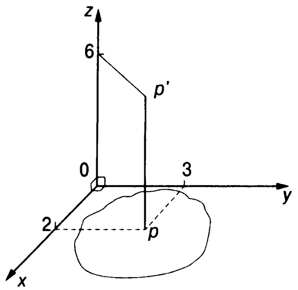


Рис. 9.17

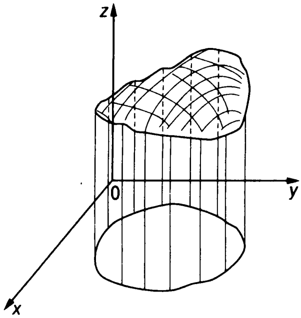


Рис. 9.18

9.10.2. Максимумы, минимумы и седловые точки

Частные производные определяют при нахождении стационарных точек функций двух переменных. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет *максимум* в точке (x, y), если значение функции в данной точке больше, чем в любой точке ее окрестности; функция $f(x, y)$ имеет *минимум* в точке (x, y), если значение функции в данной точке меньше, чем в любой точке ее окрестности. На **Рис. 9.19** геометрически показано максимальное значение функции двух переменных; из рисунка видно, что поверхность $z = f(x, y)$ в точке $(x, y) = (a, b)$ выше, чем в любой точке ее окрестности.

На **Рис. 9.20** показано минимальное значение функции двух переменных, из рисунка видно, что поверхность $z = f(x, y)$ в точке $(x, y) = (a, b)$ ниже, чем в любой точке ее окрестности.

Если $z = f(x, y)$, и максимум находится в точке (a, b), тогда кривые, лежащие в двух плоскостях $x = a$ и $y = b$, также должны иметь максимум в точке (a, b), как показано на **Рис. 9.21**. Следовательно, касательные к кривым (обозначенные на рисунке как t_1 и t_2) в точке (a, b) должны быть параллельны Оx и Оy соответственно. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ для всех точек максимума и минимума, и решение данных уравнений дает стационарные (критические) точки z.

Для функций двух переменных существует три типа стационарных точек: это точка максимума, точка минимума и *седловая точка*. Седловая точка Q показана на **Рис. 9.22**, это точка, являющаяся максимумом для кривой 1 и минимумом для кривой 2.

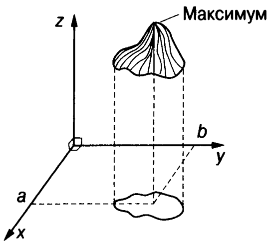


Рис. 9.19

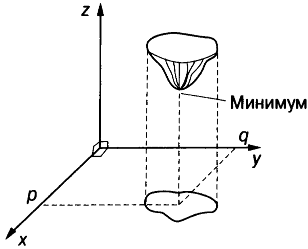


Рис. 9.20

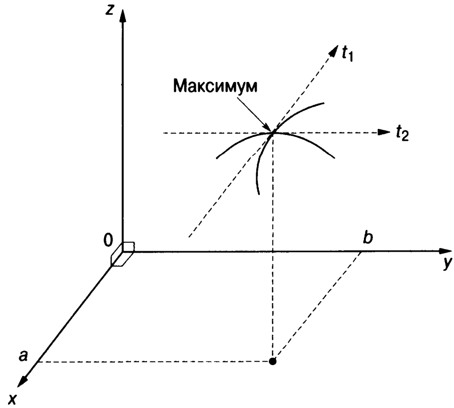


Рис. 9.21

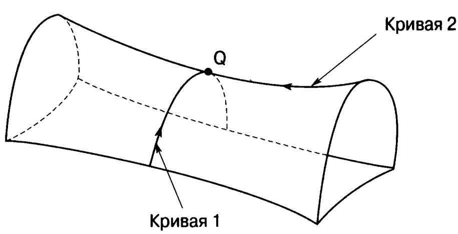


Рис. 9.22

9.10.3. Процедура определения максимумов, минимумов и седловых точек функций двух переменных

Пусть $z = f(x, y)$. Тогда следует выполнить следующие шаги:

Шаг 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Шаг 2. Для стационарных точек записать $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Шаг 3. Решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ относительно x и y; в итоге получим координаты стационарных точек.

Шаг 4. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Шаг 5. Для координат каждой стационарной точки подставить значения x и y в $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и вычислить эти выражения.

Шаг 6. Найти $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ для каждой стационарной точки.

Шаг 7. Подставить значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в выражение $\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ и вычислить его.

Шаг 8. а) Если $\Delta > 0$, то стационарная точка является *седловой;*

б) если $\Delta < 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то стационарная точка является *максимумом;*

в) если $\Delta < 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то стационарная точка является *минимумом.*

Пример. Координаты и природа стационарной точки функции $z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ определяются следующим образом.

Выполняем описанные выше шаги:

Шаг 1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-2)$.

Шаг 2. $2(x - 1) = 0;$ (1)

$2(y - 1) = 0.$ (2)

Шаг 3. Из уравнений (1) и (2), $x = 1$ и $y = 2$; значит, единственная стационарная точка имеет координаты (1, 2).

Шаг 4. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) = 2x-2$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$

и так как $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-2) = 2y-4$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{dy}\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial x}(2y-4) = 0$.

Шаг 5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Шаг 6. $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

Шаг 7. $\Delta = (0)^2 - (2)(2) = -4$.

Шаг 8. Поскольку $\Delta < 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то **стационарная точка (1, 2) является минимумом**.

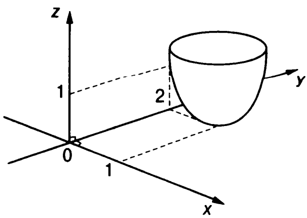


Рис. 9.23

Поверхность $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ показана на **Рис. 9.23** в трехмерном виде. Изображение этой поверхности на плоскости $x - y$ передает *контурная карта*. Горизонталь — это линия на карте, ограничивающая области, лежащие на одинаковой высоте относительно начала отсчета (на географических картах это обычно уровень моря). Контурная карта поверхности $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ показана на **Рис. 9.24**. Значения z, показанные на карте, демонстрируют подъем или понижение данной точки относительно стационарной точки.

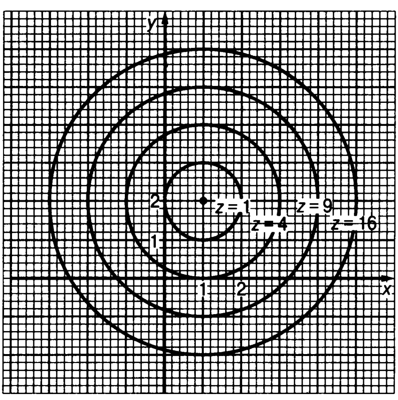


Рис. 9.24

Пример. Открытый прямоугольный контейнер должен иметь объем 62.5 см^3. Определить ширину, длину и высоту контейнера, при которых для его изготовления потребуется наименьшее количество материала, и найти суммарную площадь днища и стенок.

Пусть размеры контейнера x, y и z, как показано на **Рис. 9.25**. Объем и площадь поверхности соответственно равны:

$$V = xyz = 62.5. \tag{1}$$

$$S = xy + 2yz + 2xz. \tag{2}$$

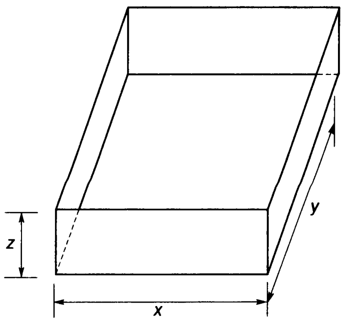


Рис. 9.25

Из уравнения (1), $z = \dfrac{62.5}{xy}$.

Делаем подстановку в уравнение (2):

$$S = xy + 2y\left(\frac{62.5}{xy}\right) + 2x\left(\frac{62.5}{xy}\right).$$

То есть $S = xy + \dfrac{125}{x} + \dfrac{125}{y}$ — это функция двух переменных.

$\dfrac{\partial S}{\partial y} = y - \dfrac{125}{x^2} = 0$ для стационарной точки, следовательно,

$$x^2y = 125. \tag{3}$$

$\dfrac{\partial S}{\partial y} = x - \dfrac{125}{y^2} = 0$ для стационарной точки, следовательно,

$$xy^2 = 125. \tag{4}$$

Делим уравнение (3) на уравнение (4):

$$\frac{x^2y}{xy^2} = 1, \text{т. е. } \frac{x}{y} = 1, \text{т. е. } x = y.$$

Подставляем $x = y$ в уравнение (3) и получаем $x^3 = 125$, откуда $x = 5$ м. Следовательно, также и $y = 5$ м.

Из уравнения (1), $(5)(5)(z) = 62.5$, откуда $z = \dfrac{62.5}{25} = 2.5$ м.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{250}{x^3}, \ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{250}{y^3}, \ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1.$$

При $x = y = 5$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2$ и $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$,

$$\Delta = (1)^2 - (2)(2) = -3.$$

Поскольку $\Delta < 0$ и $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} > 0$, значит, площадь поверхности S **минимальна**.

Следовательно, минимальные размеры контейнера объемом 62.5 м^3 составляют $5 \times 5 \times 2.5$.

Из уравнения (2):

Минимальная площадь поверхности $S = (5)(5) + 2(5)(2.5) + 2(5)(2.5) =$ **75 м^2**.

Глава 10

Интегральное исчисление

10.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

10.1.1. Процесс интегрирования

Процесс интегрирования является обратным к процессу дифференцирования. При дифференцировании если $f(x) = 2x^2$, то $f'(x) = 4x$. Значит, интеграл от $4x$ — это $2x^2$, т. е. интегрирование — это процесс перехода от $f'(x)$ к $f(x)$. Аналогично интеграл от $2t$ — это t^2.

Интегрирование — это процесс суммирования, и для замены слов «интеграл от» используется удлиненная буква S — символ $\int$. Из сказанного выше следует, что $\int 4x = 2x^2$ и $\int 2t = t^2$.

При дифференцировании производная $\frac{dy}{dx}$ означает, что функция от x дифференцируется по x, dx означает «дифференцирование по x». При интегрировании переменная интегрирования обозначается добавлением перед ней после интегрируемой функции буквы d.

Таким образом, $\int 4x\, dx$ означает «интеграл от $4x$ по x», а $\int 2t\, dt$ — «интеграл от $2t$ по t».

Как установлено выше, производная $2x^2$ равна $4x$, следовательно, $\int 4x\, dx = 2x^2$. Однако производная $2x^2 + 7$ также равна $4x$. Следовательно, $\int 4x\, dx$ также равен и $2x^2 + 7$. Чтобы указать при интегрировании на возможное наличие константы, к результату добавляют константу «c».

Итак, $\int 4x\, dx = 2x^2 + c$ и $\int 2t\, dt = t^2 + c$.

«c» называется *произвольной постоянной интегрирования.*

10.1.2. Общая формула интегралов от ax^n

Общее решение интеграла вида $\int ax^n\,dx$, где a и n — константы, дается формулой

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c.$$

Это правило верно, если n, дробное, нулевое, положительное или отрицательное целое, за исключением $n = -1$.

Пример. $\int 3x^4 dx = \frac{3x^{4+1}}{4+1} = \frac{3}{5}x^5 + c$.

Пример. $\int \frac{2}{x^2} = \int 2x^{-2}dx = \frac{2x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{2x^{-1}}{-1} + c = \frac{-2}{x} + c$.

Пример. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$.

Каждый из полученных результатов можно проверить дифференцированием.

Интеграл от константы k — это $kx + c$.

Например: $\int 8dx = 8x + c$.

При интегрировании суммы нескольких членов в результате получается сумма интегралов отдельных членов.

Пример.

$$\int (3x + 2x^2 - 5)dx = \int 3xdx + \int 2x^2dx - \int 5dx = \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - 5x + c.$$

10.1.3. Стандартные интегралы

Поскольку интегрирование — это процесс, обратный дифференцированию, можно составить таблицу *стандартных интегралов* (см. **Табл. 10.1**), которые могут быть проверены дифференцированием. Их называют также табличными.

Пример.

$$\int \frac{2x^3 - 3x}{4x}dx = \int \frac{2x^3}{4x} - \frac{3x}{4x}dx = \int \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{3}{4}x + c = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x + c = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x + c.$$

Таблица 10.1. *Стандартные интегралы*

$\int ax^n\,dx$	$= \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$ (за исключением случая $n = -1$)
$\int \cos ax\,dx$	$= \frac{1}{a}\sin\ ax + c$
$\int \sin ax\,dx$	$= -\frac{1}{a}\cos\ ax + c$
$\int \sec^2 ax\,dx$	$= \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\ ax + c$
$\int \mathrm{cosec}^2 ax\,dx$	$= -\frac{1}{a}\,\mathrm{ctg}(ax + c)$
$\int \mathrm{cosec}\ ax\ \mathrm{ctg}\ ax\,dx$	$= -\frac{1}{a}\mathrm{cosec}\ ax + c$
$\int \sec ax\ \mathrm{tg}\ ax\,dx$	$= \frac{1}{a}\sec\ ax + c$
$\int e^{ax}\,dx$	$= \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\int \frac{1}{x}dx$	$= \ln x + c$

Пример.

$$\int\frac{-5}{9\sqrt[4]{t^3}}dt = \int\frac{-5}{9t^{3/4}}dt = \int\left(-\frac{5}{9}\right)t^{-\frac{3}{4}}dt = \left(-\frac{5}{9}\right)\frac{t^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c =$$

$$= \left(-\frac{5}{9}\right)\frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = \left(-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{1}\right)t^{1/4} + c = -\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}\sqrt[4]{\boldsymbol{t+c}}\,.$$

Пример.

$$\int(4\cos 3x - 5\sin 2x)dx = (4)\left(\frac{1}{3}\right)\sin 3x - (5)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x =$$

$$= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\mathbf{\sin 3}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\mathbf{\cos 2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\,.$$

Пример.

$$\int(7\sec^2 4t + 3\operatorname{cosec}^2 2t)dt = (7)\left(\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}4t + (3)\left(-\frac{1}{2}\right)\operatorname{ctg}2t + c =$$

$$= \mathbf{\frac{7}{4}tg4t - \frac{3}{2}ctg2t + c}.$$

Пример.

$$\int\frac{2}{3e^{4t}}dt = \int\frac{2}{3}e^{-4t}dt = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4t} + c = \frac{1}{6}e^{-4t} + c = -\mathbf{\frac{1}{6e^{4t}} + c}.$$

Пример. $\int\frac{3}{5x}dx = \int\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \mathbf{\frac{3}{5}\ln x + c}$.

10.1.4. Определенные интегралы

Интеграл, содержащий в своем результате произвольную константу c, называется *неопределенным интегралом,* поскольку невозможно определить его точное значение без дополнительной информации. *Определенный интеграл* — это интеграл, имеющий заданные пределы.

Если выражение записывается в виде $[x]|_a^b$, тогда b называется верхним пределом интегрирования, a — нижним пределом.

Процесс применения пределов определяется выражением $[x]|_a^b = (b) - (a)$.

Значение интеграла x^2 при возрастании x от 1 до 3 записывается в виде $\int_1^3 x^2 dx$. Применяя пределы, получим

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + c\right) - \left(\frac{1^3}{3} + c\right) = (9 + c) - \left(\frac{1}{3} + c\right) = \mathbf{8\frac{2}{3}}.$$

Отметим, что при наличии пределов интегрирования член «c» всегда отсутствует в окончательном результате, поэтому для определенных интегралов его не нужно показывать.

Пример.

$$\int_0^{\pi/2} 3\sin 2x dx = \left[(3)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \left[-\frac{3}{2}\cos 2x\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \left\{-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \left\{-\frac{3}{2}\cos 2(0)\right\} = \left\{-\frac{3}{2}\cos\pi\right\} - \left\{-\frac{3}{2}\cos 0\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{3}{2} - (-1)\right\} - \left\{-\frac{3}{2}(1)\right\} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \mathbf{3}.$$

Пример.

$$\int_1^2 4\cos 3t dt = \left[(4)\left(\frac{1}{3}\right)\sin 3t\right]\Bigg|_1^2 = \left[\frac{4}{3}\sin 3t\right]\Bigg|_1^2 = \left\{\frac{4}{3}\sin 6\right\} - \left\{\frac{4}{3}\sin 3\right\}.$$

Заметим, что пределы тригонометрических функций всегда выражаются в радианах; таким образом, например, sin 6 означает sin 6 радиан = –0.279415.

Следовательно,

$$\int_1^2 4\cos 3t dt = \left\{\frac{4}{3}(-0.279415\ldots)\right\} - \left\{\frac{4}{3}(0,\ 141120\ldots)\right\} =$$

$$= (-0.37255) - (0.18816) = \mathbf{-0.5607}.$$

Пример. $\int_1^2 4e^{2x} dx = \left[\frac{4}{2}e^{2x}\right]\Bigg|_1^2 = 2[e^{2x}]|_1^2 = 2[e^4 - e^2] =$

$$= 2[54.5982 - 7.3891] = \mathbf{94.42}.$$

Пример.

$$\int_1^4 \frac{3}{4u} du = \left[\frac{3}{4}\ln u\right]\Bigg|_1^4 = \frac{3}{4}[\ln 4 - \ln 1] = \frac{3}{4}[1.3863 - 0] = \mathbf{1.040}.$$

10.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОДСТАНОВКОЙ

10.2.1. Введение

Функции, подлежащие интегрированию, не всегда имеют стандартный вид, как в разд. 10.1. Однако часто можно привести функцию к такому виду, что ее можно проинтегрировать, используя:

- алгебраическую подстановку (см. выше),
- тригонометрические и гиперболические подстановки (разд. 10.3 и 10.5),
- простейшие дроби (разд. 10.4),
- интегрирование по частям (разд. 10.6),
- формулу понижения степени (разд. 10.7).

10.2.2. Алгебраическая подстановка

Обычно делают *алгебраическую подстановку* $u = f(x)$ таким образом, чтобы $f(u)du$ являлся стандартным интегралом. Известно, что интегралы вида $k[f(x)]^n f'(x)\,dx$ и $k\int\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx$ (где k и n — константы) могут быть проинтегрированы при подстановке u вместо $f(x)$.

Пример. Найти $\int\cos(3x+7)\,dx$.

$\int\cos(3x+7)\,dx$ — это не табличный интеграл, его нет в **Табл. 10.1**, поэтому необходимо использовать метод алгебраической подстановки.

Пусть $u = 3x + 7$, тогда $\frac{du}{dx} = 3$ и перестановка дает $dx = \frac{du}{3}$.

Следовательно, $\int\cos(3x+7)dx = \int(\cos u)\frac{du}{3} = \int\frac{1}{3}\cos u\,du =$

$$= \frac{1}{3}\sin u + c.$$

Переписав u в виде $(3x + 7)$, получаем $\int\cos(3x+7)dx =$ $= \frac{1}{3}\sin(3x+7)+c$, что можно проверить дифференцированием.

Пример. Найти $\int(2x-5)^7dx$.

$(2x - 5)$ можно умножить само на себя 7 раз и проинтегрировать каждый член полученного многочлена. Однако это длительный процесс, поэтому проще сделать алгебраическую подстановку.

Пусть $u = (2x-5)$, тогда $\frac{du}{dx} = 2$ и $dx = \frac{du}{2}$. Следовательно,

$$\int(2x-5)^7dx = \int u^7\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^7du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^8}{8}\right)+c = \frac{1}{16}u^8+c.$$

Переписывая u в виде $(2x - 5)$, получаем

$$\int (2x-5)^7 dx = \frac{1}{16}(2x-5)^8 + c.$$

Пример. Найти $\int \frac{4}{(5x-3)} dx$.

Пусть $u = (5x-3)$. Тогда $\frac{du}{dx} = 5$ и $dx = \frac{du}{5}$. Следовательно,

$$\int \frac{4}{(5x-3)} dx = \int \frac{4}{u}\frac{du}{5} = \frac{4}{5}\int \frac{1}{u} du =$$

$$= \frac{4}{5}\ln u + c = \frac{4}{5}\ln(5x-3) + c.$$

Пример. Найти $\int_0^{\pi/6} 24\sin^5\theta\cos\theta d\theta$.

Пусть $u = \sin\theta$, тогда $\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$ и $d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$. Следовательно,

$$\int 24\sin^5\theta\cos\theta d\theta = \int 24u^5\cos\theta\frac{du}{\cos\theta} = \int u^5 du =$$

$$= 24\frac{u^6}{6} + c = 4u^6 + c = 4(\sin\theta)^6 + c = 4\sin^6\theta + c.$$

Итак,

$$\int_0^{\pi/6} 24\sin^5\theta\cos\theta d\theta = [4\sin^6\theta]\Big|_0^{\pi/6} = 4\left[\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 - (\sin 0)^6\right] =$$

$$= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 0\right] = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

10.2.3. Замена пределов

При вычислении определенных интегралов с помощью подстановки иногда удобнее осуществить *замену пределов* интеграла.

Пример. Найти $\int_1^3 5x\sqrt{2x^2+7}dx$, беря только положительные значения квадратного корня.

Пусть $u = 2x^2 + 7$. Тогда $\frac{du}{dx} = 4x$ и $dx = \frac{du}{4x}$. При $x = 3$, $u = 2(3)^2 + 7 = 25$, а при $x = 1$, $u = 2(1)^2 + 7 = 9$. Следовательно,

$$\int_{x=1}^{x=3} 5x\sqrt{2x^2+7}\,dx = \int_{u=9}^{u=25} 5x\sqrt{u}\frac{du}{4x} = \frac{5}{4}\int_9^{25}\sqrt{u}\,du = \frac{5}{4}\int_9^{25} u^{1/2}du\,.$$

Таким образом, были заменены пределы, и поэтому нет необходимости снова выражать интеграл через x. Итак,

$$\int_{x=1}^{x=3} 5x\sqrt{2x^2+7}\,dx = \frac{5}{4}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_9^{25} = \frac{5}{6}[\sqrt{u^3}]\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{5}{6}[\sqrt{25^3}-\sqrt{9^3}] = \frac{5}{6}(125-27) = \mathbf{81\frac{2}{3}}.$$

10.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ

В Табл. 10.2 приведены *тригонометрические и гиперболические подстановки*.

Таблица 10.2. *Тригонометрические и гиперболические подстановки*

<table>
<tr><th>п/п</th><th>$f(x)$</th><th>$\int f(x)\,dx$</th><th>Метод</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\cos^2 x$</td><td>$\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$</td><td>$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\sin^2 x$</td><td>$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$</td><td>$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\mathrm{tg}^2 x$</td><td>$\mathrm{tg}\,x - x + c$</td><td>$1 + \mathrm{tg}x = \sec^2 x$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\mathrm{ctg}^2 x$</td><td>$-\mathrm{ctg}\,x - x + c$</td><td>$\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\cos^m x\sin^n x$</td><td colspan="2">а) Если или m, или n нечетное (но не оба), использовать $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
б) Если и m, и n четные, использовать $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ или $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\sin A\cos B$</td><td rowspan="4"></td><td>$\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\cos A\sin B$</td><td>$\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\cos A\cos B$</td><td>$\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\sin A\sin B$</td><td>$-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы

п/п	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Метод
10	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}+c$	Взять $x=a\sin\theta$
11	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$	
12	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+c$	Взять $x=a\operatorname{tg}\theta$
13	$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$	$\operatorname{arsh}\dfrac{x}{a}+c$ или $\ln\left\{\dfrac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}\right\}+c$	Взять $x=a\sin\theta$
14	$\sqrt{(x^2+a^2)}$	$\dfrac{a^2}{2}\operatorname{arsh}\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}+c$	
15	$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$	$\operatorname{arch}\dfrac{x}{a}+c$ или $\ln\left\{\dfrac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right\}+c$	Взять $x=a\cos\theta$
16	$\sqrt{(x^2-a^2)}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{(x^2-a^2)}-\dfrac{a^2}{2}\operatorname{arch}\dfrac{x}{a}+c$	

Пример. Найти $\int_0^{\pi/4} 2\cos^2 4t\,dt$.

Поскольку $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ (из разд. 3.6), то $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ и $\cos^2 4t = \frac{1}{2}(1+\cos 8t)$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/4} 2\cos^2 4t\,dt = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(1+\cos 8t)\,dt = \left[t+\frac{\sin 8t}{8}\right]\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 8\frac{\pi}{4}}{8}\right]-\left[0+\frac{\sin 0}{8}\right] = \frac{\pi}{4}\approx \mathbf{0.7854}.$$

Пример. Найти $3\int \text{tg}^2 4x\, dx$.

Поскольку $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$, значит, $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ и $\text{tg}^2 4x = \sec^2 4x - 1$. Следовательно,

$$3\int \text{tg}^2 4x dx = 3\int (\sec^2 4x - 1)dx = 3\left(\frac{\text{tg} 4x}{4} - x\right) + c.$$

Пример. Найти $\int \sin^5\theta\, d\theta$.

Поскольку $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, то $\sin^2\theta = (1 - \cos^2\theta)$.

Следовательно,

$$\int \sin^5\theta\, d\theta = \int \sin\theta(\sin^2\theta)^2 d\theta = \int \sin\theta(1 - \cos^2\theta)^2 d\theta =$$

$$= \int \sin\theta(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta)d\theta =$$

$$= \int (\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta\cos^4\theta)d\theta =$$

$$= -\cos\theta + \frac{2\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos^5\theta}{5} + c.$$

(Если возведенный в некоторую степень косинус умножается на синус в 1-й степени или наоборот, то интеграл можно взять данным способом.

В общем, $\int \cos^n\theta \sin\theta d\theta = \frac{-\cos^{n+1}\theta}{(n+1)} + c$ и

$$\int \sin^n\theta \cos\theta d\theta = \frac{\sin^{n+1}\theta}{(n+1)} + c.$$

Или же можно использовать алгебраическую подстановку, как показано в разд. 10.2.)

Пример. Найти $\int \sin^2 t \cos^4 t\, dt$.

$$\int \sin^2 t \cos^4 t dt = \int \sin^2 t(\cos^2 t)^2 dt =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2t)(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t - \cos 2t - 2\cos^2 2t - \cos^3 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2t - \cos^2 2t - \cos^3 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2t - \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right) - \cos 2t(1 - \sin^2 2t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} + \cos 2t \sin^2 2t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} + \frac{\sin^2 2t}{6}\right) + c\,.$$

Пример. Найти $\int \sin 3t \cos 2t\, dt$.
Принимая во внимание п. 6 **Табл. 10.2**:

$$\int \sin 3t \cos 2t dt = \int \frac{1}{2}[\sin(3t+2t) + \sin(3t-2t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 5t + \sin t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 5t}{5} - \cos t\right) + c\,.$$

Пример. Найти $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)}}dx$.

Из п. 10 **Табл. 10.2**:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)}}dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]\Bigg|_0^3 =$$

(поскольку $a = 3$)

$$= (\sin^{-1}1 - \sin^{-1}0) = \frac{\pi}{2} \approx \mathbf{1.5708}\,.$$

Пример. Найти $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$.

Из п. 11 **Табл. 10.2**:

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = \left[\frac{16}{2}\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}\right]\Bigg|_0^4 =$$

$$= [8\sin^{-1}1 + 2\sqrt{0}] - [8\sin^{-1}0 + 0] =$$

$$= 8\sin^{-1}1 = 8\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{4\pi} \approx \mathbf{12.57}\,.$$

Пример. Найти $\int_0^2 \frac{1}{(4+x^2)}dx$.

Из п. 12 **Табл. 10.2**, при $a = 2$

$$\int_0^2 \frac{1}{(4+x^2)}dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{arctg } 1 - \text{arctg } 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8} \approx \mathbf{0.3927}.$$

Пример. Найти $\int_0^2 \frac{1}{(x^2+4)} dx$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x^2+4)} dx = \left[\text{ar sh}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^2 = \left[\ln\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right\}\right]\Bigg|_0^2$$

(из п. 13 **Табл. 10.2**, при $a = 2$).

Используем логарифмическую форму записи:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) - \ln\left(\frac{0+\sqrt{4}}{2}\right)\right] = \ln 2.4142 - \ln 1 =$$

$= \mathbf{0.8814}$ с точностью до 4 знаков после десятичной точки.

Пример. Найти $\int \frac{2x-3}{\sqrt{(x^2-9)}} dx$.

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{(x^2-9)}} dx = \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2-9)}} dx - \int \frac{3}{\sqrt{(x^2-9)}} dx.$$

Первый интеграл находим с помощью алгебраической подстановки $u = (x^2 - 9)$, второй интеграл имеет вид $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}} dx$ (п. 15 **Табл. 10.2**). Следовательно,

$$\int \frac{2x}{\sqrt{(x^2-9)}} dx - \int \frac{3}{\sqrt{(x^2-9)}} dx = \mathbf{2\sqrt{(x^2-9)} - 3\text{arch}\frac{x}{3} + c}.$$

10.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЕМ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

10.4.1. Введение

Процесс выражения дроби через простейшие дроби называется *разложением на простейшие дроби,* оно обсуждалось в разд. 1.14, формы простейших дробей приведены в **Табл. 1.3** на стр. 83.

Для интегрирования некоторых функций их необходимо сначала разложить на простейшие дроби.

10.4.2. Линейные сомножители

Пример. Найти $\int \frac{11-3x}{x^2+2x-3}dx$.

Как показано на стр. 84, $\frac{11-3x}{x^2+2x-3} \equiv \frac{2}{(x-1)} - \frac{5}{(x+3)}$.

Следовательно, $\int \frac{11-3x}{x^2+2x-3}dx = \int \left\{ \frac{2}{(x-1)} - \frac{5}{(x+3)} \right\} dx =$

$$= \mathbf{2\ln(x-1) - 5\ln(x+3) + c}$$

с помощью алгебраической подстановки (разд. 10.2), или $\ln\left(\frac{x-1^2}{x+3^5}\right) + c$, согласно правилам логарифмирования.

Пример. Найти $\int_2^3 \frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}dx$ с точностью до 4 значащих цифр.

Применяем разложение на простешие дроби, как показано на стр. 84:

$$\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2} \equiv x-3+\frac{4}{(x+2)} - \frac{3}{(x-1)}.$$

Следовательно,

$$\int_2^3 \frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}dx \equiv \int_2^3 \left\{ x-3+\frac{4}{(x+2)} - \frac{3}{(x-1)} \right\} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln(x+2) - 3\ln(x-1)\right]\Bigg|_2^3 = \left(\frac{9}{2} - 9 + 4\ln 5 - 3\ln 2\right) =$$

$= -(2 - 6 + 4\ln 4 - 3\ln 1) = \mathbf{-1.687}$ с точностью до 4 значащих цифр.

10.4.3. Повторяющиеся линейные сомножители

Пример. Найти $\int \frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}dx$.

На стр. 85 было показано, что

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2} \equiv \frac{2}{(x+3)} + \frac{3}{(x-1)} - \frac{4}{(x-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2} dx \equiv \int \left\{ \frac{2}{(x+3)} + \frac{3}{(x-1)} - \frac{4}{(x-1)^2} \right\} dx =$$

$$= \mathbf{2\ln(x+3) + 3\ln(x-1) + \frac{4}{(x-1)} + c =}$$

$$= \mathbf{\ln(x+3)^3(x-1)^3 + \frac{4}{(x-1)} + c}.$$

10.4.4. Квадратичные сомножители

Пример. Найти $\int \frac{3+6x+4x^2-2x^3}{x^2(x^2+3)} dx$.

На стр. 86 было показано, что

$$\frac{3+6x+4x^2-2x^3}{x^2(x^2+3)} \equiv \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3-4x}{(x^2+3)}.$$

Итак,

$$\int \frac{3+6x+4x^2-2x^3}{x^2(x^2+3)} dx \equiv \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3-4x}{(x^2+3)} \right) dx =$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{(x^2+3)} - \frac{4x}{(x^2+3)} \right\} dx.$$

$\int \frac{3}{(x^2+x)} dx = 3 \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2} dx = \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$ из п. 12 **Табл. 10.2.**

$\int \frac{4x}{x^3+3} dx$ находится с помощью алгебраической подстановки $u = (x^2+3)$. Следовательно,

$$\int \left\{ \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{(x^2+3)} - \frac{4x}{(x^2+3)} \right\} dx =$$

$$= 2\ln x - \frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - 2\ln(x^2+3) + c =$$

$$= \mathbf{\ln\left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{3}\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c}.$$

10.5. ПОДСТАНОВКА $t = \operatorname{tg} \theta/2$

Интегралы вида $\int \frac{1}{a\cos\theta + b\sin\theta + c} d\theta$, где a, b и c — константы, могут быть вычислены с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. Причины приведены ниже.

Угол A в прямоугольном треугольнике ABC на **Рис. 10.1** приравнивается к $\frac{\theta}{2}$, поскольку тангенс определен как $\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$; если BC $= t$ и AB $= 1$, то $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$. По теореме Пифагора, AC $= \sqrt{1+t^2}$.

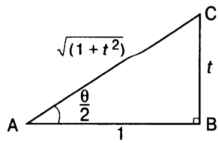


Рис. 10.1

Следовательно, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Поскольку $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (из формулы двойного угла, разд. 3.8), то $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, т. е.

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2t}{(1+t^2)}} \tag{1}$$

Поскольку $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (из формулы двойного угла), то

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2,$$

т. е.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \tag{2}$$

Также поскольку $t = \text{tg}\dfrac{\theta}{2}$, $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ из тригонометрических тождеств, т. е. $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{2}(1 + t^2)$, откуда

$$\boxed{d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}} \qquad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) используются для нахождения интегралов вида $\displaystyle\int\frac{1}{a\cos\theta + b\sin\theta + c}d\theta$, где a, b и c могут равняться нулю.

Пример. Найти $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta}$.

Если $t = \text{tg}\dfrac{\theta}{2}$, то $\sin\theta = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ и $d\theta = \dfrac{2d\theta}{1 + t^2}$ из уравнений (1) и (3).

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \int\frac{1}{\frac{2t}{1 + t^2}}\left(\frac{2d\theta}{1 + t^2}\right) = \int\frac{1}{t}dt = \ln t + c$.

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\left(\text{tg}\frac{\theta}{2}\right) + c$.

Пример. Найти $\displaystyle\int\frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$.

Если $t = \text{tg}\dfrac{\theta}{2}$, то $\cos\theta = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ и $d\theta = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$ из уравнений (2) и (3). Таким образом,

$$\int\frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \int\frac{1}{5 + 4\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)}\left(\frac{2dt}{1 + t^2}\right) =$$

$$= \int\frac{1}{\frac{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2)}{1 + t^2}}\left(\frac{2dt}{1 + t^2}\right) = 2\int\frac{dr}{t^2 + 9} = 2\int\frac{dr}{t^2 + 3^2} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\text{arctg}\,\frac{t}{3}\right) + c.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \frac{2}{3}\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\text{tg}\frac{\theta}{2}\right) + c$.

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Если $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ согласно уравнениям (1), (2) и (3).

Итак, $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}} =$

$$= \int \frac{2dt}{1+2t-t^2} = \int \frac{-2dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2dt}{(t-1)^2-2} = \int \frac{2dt}{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2} =$$

$= 2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left\{\frac{\sqrt{2}+t-1}{\sqrt{2}-t-1}\right\}\right] + c$ (используем элементарные дроби).

То есть $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left\{\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right\} + c$.

10.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Согласно правилу дифференцирования произведения, $\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$, где u и v — функции от x.

Совершаем перестановку: $u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$.

Интегрируем обе части уравнения по x:

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = \int \frac{d}{dx}(uv)dx - \int v\frac{du}{dx}dx.$$

То есть

$$\boxed{\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx} \text{ или } \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Эта формула известна как формула *интегрирования по частям,* она дает метод интегрирования произведений простых функций типа $\int xe^x dx$, $\int t\sin t\,dt$, $\int e^\theta d\theta$ и $\int x\ln x\,dx$.

При необходимости проинтегрировать произведение двух сомножителей главный выбор заключается в том, какую часть сделать равной u, а какую — dv. Причем надо, чтобы часть «u» стала константой после последовательного дифференцирования, а часть «dv» могла бы интегрироваться в качестве табличного интеграла.

Данное правило устанавливает:

> ***Если подлежащее интегрированию произведение содержит алгебраический множитель (вида x, t^2 или 3θ), то данный член выбирается в качестве части u. Единственное исключение — это наличие $\ln x$, в данном случае в качестве части «u» выбирают $\ln x$.***

Пример. Найти $\int x \cos x\, dx$.

Согласно формуле интегрирования по частям,

$$\int u\, du = uv - \int v\, du.$$

Пусть $u = x$, откуда $\frac{du}{dx} = 1$, т. е. $du = dx$, и пусть $dv = \cos x\, dx$, значит, $v = \int \cos x\, dx = \sin x$.

Выражения для u, du, v и dv теперь подставляем в формулу интегрирования по частям, приведенную выше:

$$\int \boxed{u}\ \boxed{dv} = \boxed{u}\ \boxed{v} - \int \boxed{v}\ \boxed{du}$$

$$\int \boxed{x}\ \boxed{\cos x\, dx} = \boxed{(x)}\ \boxed{(\sin x)} - \int \boxed{(\sin x)}\ \boxed{(dx)}$$

То есть $\int x \cos x\, dx = x \sin x - (-\cos x) + c = \mathbf{x \sin x + \cos x + c}$.

П р о в е р к а. Результат можно проверить дифференцированием, т. е. по правилу дифференцирования произведения

$$\frac{d}{dx}((x \sin x + \cos x + c)) =$$

$= [(x)(\cos x) + (\sin x)(1)] - \sin x + 0 = x \cos x$, это и есть интегрируемая функция.

Пример. Найти $\int 3te^{2t}\, dt$.

Пусть $u = 3t$, тогда $\frac{du}{dt} = 3$, то есть $du = 3dt$, и пусть $dv = e^{2t}\, dt$, откуда $v = \int e^{2t}\, dt = \frac{1}{2}e^{2t}$.

Подставляем эти функции в формулу $\int u\, dv = uv - \int v\, du$:

$$\int 3te^{2t}dt = (3t)\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)3dt = \frac{3}{2}te^{2t} - \frac{3}{2}\int e^{2t}dt =$$

$$= \frac{3}{2}te^{2t} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right) + c.$$

Следовательно, $\int 3te^{2t}dt = \frac{3}{2}e^{2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + c$, что можно проверить дифференцированием.

Пример. Найти $\int x^2 \sin x\, dx$.

Пусть $u = x^2$, откуда $\frac{du}{dx} = 2x$, т. е. $du = 2xdx$, и пусть $dv = \sin x\, dx$, значит, $v = \int \sin x\, dx = -\cos x$.

Подставляем $\int u\, dv = uv - \int v\, du$:

$$\int x^2 \sin x\, dx = (x^2)(-\cos x) - \int(-\cos x)(2xdx) =$$

$$= -x^2\cos x + 2[\int x\cos x dx].$$

Интеграл $\int x \cos x\, dx$ — это не табличный интеграл, и его можно найти, снова применив формулу интегрирования по частям.

Из первого примера, $\int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x$. Следовательно,

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2[x \sin x + \cos x] + c =$$

$$= -x^2\cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + c.$$

В общем, если алгебраический член содержит произведение в степени n, тогда формулу интегрирования по частям следует применить n раз.

Пример. Найти $\int x \ln x\, dx$.

Логарифмическую часть выбираем в качестве функции u.

Тогда если $u = \ln x$, то $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, то есть $du = \frac{dx}{x}$.

Пусть $dv = x\, dx$, тогда $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

Подставляем в $\int u\, dv = uv - \int v\, du$:

$$\int x \ln x dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c\,.$$

Следовательно, $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$ **или** $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$.

10.7. ФОРМУЛА ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

10.7.1. Введение

При использовании интегрирования по частям, рассмотренного в разд. 10.6, интеграл вида $\int x^2e^x\,dx$ необходимо интегрировать по частям дважды. Аналогично интеграл вида $\int x^3e^x\,dx$ необходимо интегрировать по частям трижды. Таким образом, интегрирование по частям интегралов вида $\int x^5e^x\,dx$, $\int x^6e^x\,dx$ и $\int x^8e^x\,dx$ займет много времени. *Формула понижения степени* дает более быстрый метод нахождения подобных интегралов.

10.7.2. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^ne^xdx$

Найдем интеграл вида $\int x^ne^x\,dx$ методом интегрирования по частям. Пусть $u = x^n$, откуда $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$ и $du = nx^{n-1}dx$, а $dv = e^x\,dx$, откуда $v = \int e^x\,dx = e^x$.

Таким образом, $\int x^ne^x\,dx = x^ne^x - \int e^xnx^{n-1}dx = x^ne^x - n\int e^xx^{n-1}dx$ по формуле интегрирования по частям.

Интеграл в правой части имеет ту же форму, что и интеграл в левой части, только n сменилось на $n - 1$.

Тогда если мы обозначим $\int x^ne^x\,dx = I_n$, то $\int x^{n-1}e^x\,dx = I_{n-1}$.

Следовательно, $\int x^ne^x\,dx = x^ne^x - n\int e^xx^{n-1}dx$ можно записать в виде

$$\boxed{I_n = x^ne^x - nI_{n-1}} \qquad (1)$$

Уравнение (1) — это пример формулы понижения степени, поскольку выражает интеграл, содержащий n-ю степень, через интеграл, содержащий $(n - 1)$-ю степень.

Пример. Найти $\int x^3e^x\,dx$, используя формулу понижения степени. Из уравнения (1), $I_n = x^ne^x - nI_{n-1}$. Следовательно,

$$\int x^3e^xdx = I_3 = x^3e^x - 3I_2,\ I_2 = x^2e^x - 2I_1,$$

$$I_1 = x^1e^x - 1I_0 \text{ и}$$
$$I_0 = \int x^0e^x dx = \int e^x dx = e^x.$$

Итак,

$$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3[x^2e^x - 2I_1] = x^3e^x - 3[x^2e^x - 2(xe^x - I_0)] =$$
$$= x^3e^x - 3[x^2e^x - 2(xe^x - e^x)] = x^3e^x - 3x^2e^x + 6(xe^x - e^x) =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x.$$

То есть

$$\boldsymbol{\int x^3e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c.}$$

10.7.3. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^n \cos x\, dx$

Пусть $I_n = \int x^n \cos x\, dx$; применим интегрирование по частям.

Если $u = x^n$, то $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$, и если $dv = \cos x\, dx$, то $v = \int \cos x\, dx = \sin x$.

Следовательно,

$$I_n = x^n \sin x - \int (\sin x) nx^{n-1} dx =$$
$$= x^n \sin x - n \int nx^{n-1} \sin x\, dx.$$

Снова применим интегрирование по частям, взяв $u = x^{n-1}$:

$\frac{du}{dx} = (n-1)x^{n-2}$ и $dv = \sin x\, dx$, откуда $v = \int \sin x\, dx = -\cos x$.

Следовательно,

$$I_n = x^n \sin x - n[x^{n-1}(-\cos x) - \int (-\cos x)(n-1)x^{n-2} dx] =$$
$$= x^n \sin x + n[x^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\, dx].$$

То есть

$$\boxed{I_n = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)I_{n-2}} \qquad (2)$$

Пример. Найти $\int x^2 \cos x\, dx$ с использованием формулы понижения степени.

Используем формулу (2):

$$\int x^2 \cos x\, dx = I_2 = x^2 \sin x + 2x^1 \cos x - 2(1)I_0$$

и

$$I_0 = \int x^0 \cos x\, dx = \int \cos x\, dx = \sin x.$$

Следовательно, $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + c$.

10.7.4. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^n \sin x\, dx$

Пусть $I_n = \int x^n \sin x\, dx$. Используем правило интегрирования по частям. Пусть $u = x^n$, тогда $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$, и пусть $dv = \sin x\, dx$, тогда $v = \int \sin x\, dx = \cos x$. Следовательно,

$$\int x^n \sin x\, dx = I_n = x^n(-\cos x) - \int (-\cos x)\, nx^{n-1} dx =$$
$$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx.$$

Снова используем правило дифференцирования по частям, положив $u = x^{n-1}$. Тогда $\frac{du}{dx} = (n-1)x^{n-2}$ и $dv = \cos x$, откуда $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Следовательно,

$$I_n = -x^n \cos x + n[x^{n-1}(\sin x) - \int (\sin x)(n-1)x^{n-1} dx] =$$
$$= -x^n \cos x + nx^{n-1}(\sin x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x\, dx,$$

т. е.

$$\boxed{I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1}(\sin x) - n(n-1)I_{n-2}} \qquad (3)$$

Пример. Найти $\int x^3 \sin x\, dx$ с использованием формулы понижения степени.

Из уравнения (3):

$$\int x^3 \sin x\, dx = I_3 = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 3(2)I_1$$

и

$$I_1 = -x^1 \cos x + 1x^0 \sin x = -x \cos x + \sin x.$$

Значит, $\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6[-x \cos x + \sin x] =$

$$\mathbf{= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c.}$$

10.7.5. Использование формулы понижения степени для интегрирования выражений вида $\int \sin^n x\, dx$

Пусть $I_n = \int \sin^n x\, dx \equiv \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx$, согласно правилам действий со степенями.

Применим интегрирование по частям. Пусть $u = \sin^{n-1}x$, значит, $\frac{du}{dx} = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x$ и $du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx$, и пусть $dv = \sin x\,dx$, откуда $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
I_n = \sin^{n-1}x\sin x\,dx = (\sin^{n-1}x)(-\cos x) - \\
- \int(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}x\cos x = \\
= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx = \\
= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx = \\
= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\left\{\int\sin^{n-2}x\,dx - \sin^n x\,dx\right\}.
\end{aligned}
$$

То есть
$$
\begin{aligned}
I_n &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,\\
I_n + (n-1)I_n &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2},\\
nI_n &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2},
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\int\sin^n x dx = \boxed{I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}} \qquad (4)
$$

Пример. Найти $\int \sin^4 x\,dx$ с помощью формулы понижения степени.

Используем уравнение (4):

$$\int\sin^4 x dx = I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}I_2.$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\sin^1 x\cos x + \frac{1}{2}I_0 \text{ и } I_0 = \int\sin^0 x dx = \int 1 dx = x.$$

Следовательно,

$$\int\sin^4 x dx = I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}(x)\right] =$$

$$= \mathbf{\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + c}\ .$$

10.7.6. Использование формулы понижения степени для интегрирования выражений вида $\int\cos^n x\,dx$

Пусть $I_n = \int\cos^n x\,dx \equiv \int\cos^{n-1}x\cos x\,dx$ согласно правилам действий со степенями. Применим интегрирование по частям.

Пусть $u = \cos^{n-1}x$, откуда $\dfrac{du}{dx} = (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)$

и $du = (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$ и пусть $dv = \cos x\, dx$, значит, $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Тогда

$$I_n = (\cos^{n-1}x)(\sin x) - \int (\sin x)(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx =$$
$$= (\cos^{n-1}x)(\sin x) + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2}x\, dx =$$
$$= (\cos^{n-1}x)(\sin x) + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\, dx =$$
$$= (\cos^{n-1}x)(\sin x) + (n-1)\left\{\int \cos^{n-2}x\, dx - \int \cos^n x\, dx\right\}.$$

То есть $\quad I_n = (\cos^{n-1}x)(\sin x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$

$$I_n + (n-1)I_n = (\cos^{n-1}x)(\sin x) + (n-1)I_{n-2}.$$

Итак,

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}} \qquad (5)$$

Пример. Найти $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ с помощью формулы понижения степени и вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$.

Из уравнения (5):

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

и, следовательно, $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left[\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} =$

$= [0+0] + \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. То есть

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}. \qquad (6)$$

(Этот результат известен как *формула Уоллиса*.)

Итак, из уравнения (6) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x dx = \dfrac{4}{5}I_3$,

$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 \text{ и } I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^1 x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = (1-0) = 1.$$

Следовательно, $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}\left[\frac{2}{3}I_1\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{2}{3}(1)\right] = \mathbf{\frac{8}{15}}$.

10.7.7. Еще одна формула понижения степени

Пример. Вывести формулу понижения степени для $\int \operatorname{tg}^n x dx$, а затем найти $\int \operatorname{tg}^7 x dx$.

Согласно правилам действия со степенями и поскольку $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$,

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx \equiv \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\, dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x\, dx - I_{n-2}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{I_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}}.$$

При $n = 7, I_7 = \int \operatorname{tg}^7 x dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - I_5$;

$I_5 = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - I_3$ и $I_3 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - I_1$.

$I_1 = \int \operatorname{tg} x dx = \ln(\sec x)$ (поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и при условии, что $u = \cos x$).

Таким образом, $\int \operatorname{tg}^7 x dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \left[\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \left(\frac{\operatorname{tg}^4 x}{2} - (\ln(\sec x))\right)\right]$.

Следовательно, $\boldsymbol{\int \operatorname{tg}^7 x dx = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln(\sec x) + c}$.

10.8. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

10.8.1. Введение

Даже при использовании усовершенствованных методов интегрирования многие математические функции нельзя проинтегрировать аналитическими методами, поэтому следует использовать приближенные методы. Приближенные методы вычисления определенных интегралов называются *численным интегрированием*.

Можно показать, что значение определенного интеграла — это фактически площадь между кривой, горизонтальной осью и заданными ординатами. Есть три метода нахождения приблизительного значения площадей под кривыми — это правило трапеций, правило прямоугольников и правило Симпсона; данные правила лежат в основе численного интегрирования.

10.8.2. Правило трапеций

Пусть требующий вычисления интеграл обозначается $\int_a^b y dx$, и он представлен площадью под графиком $y = f(x)$ в пределах между $x = a$ и $x = b$, как показано на **Рис. 10.2**.

Разобьем область интегрирования на n равных интервалов длиной d каждый таким образом, что $nd = b - a$, т. е. $d = \dfrac{b-a}{n}$.

Отмеченные ординаты: y_1, y_2, y_3,..., y_{n+1}, как показано на **Рис. 10.2**.

Правило трапеций гласит:

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \left(\text{длина интервала}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(\begin{matrix}\text{первая +}\\ \text{последняя}\\ \text{ордината}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{сумма}\\ \text{остальных}\\ \text{ординат}\end{matrix}\right)\right\}} \quad (1)$$

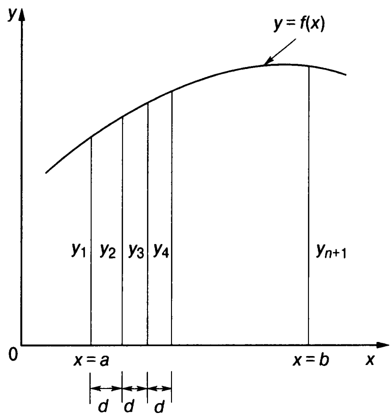


Рис. 10.2

Пример. Используя правило трапеций с 8 интервалами, вычислить $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

8 интервалов длиной $\frac{3-1}{8}$, т. е. 0.25 каждый, имеют ординаты 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75 и 3.00. Соответствующие значения $\frac{2}{\sqrt{x}}$ приведены в таблице ниже.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\frac{2}{\sqrt{x}}$	2.0000	1.7889	1.6330	1.5119	1.4142

x	2.25	2.50	2.75	3.00
$\frac{2}{\sqrt{x}}$	1.3333	1.2649	1.2060	1.1547

Из уравнения (1):

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx \approx (0.25)\left\{\begin{array}{r}\frac{1}{2}(2.000 + 1.1547) + 1.7889 + 1.6330 + \\ + 1.5119 + 1.4142 + 1.3333 + \\ + 1.2649 + 1.2060\end{array}\right\} =$$

= **2.932** с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Чем больше число выбранных интервалов (т. е. меньше длина интервала), тем точнее будет найдена величина определенного интеграла. Точное число может быть найдено, если количество интервалов бесконечно, на чем, разумеется, и основан процесс интегрирования. Проинтегрируем:

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3 2x^{-(1/2)}dx = \left[\frac{2x^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 = [4x^{1/2}]_1^3 = 4[\sqrt{x}]_1^3 =$$

$= 4[\sqrt{3} - \sqrt{1}] =$ **2.928** с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

10.8.3. Правило прямоугольников

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b ydx$, и он представлен площадью под графиком $y = f(x)$ в пределах между $x = a$ и $x = b$, как показано на **Рис. 10.3**.

По правилу прямоугольников предполагается, что каждый интервал длиной d заменяется прямоугольником с высотой,

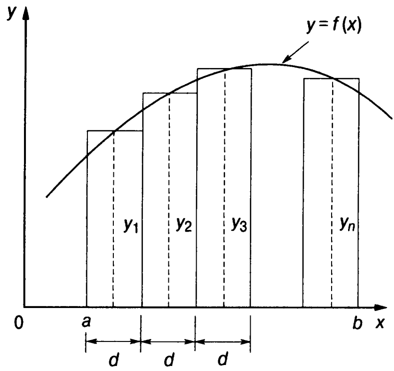


Рис. 10.3

равной ординате в середине каждого интервала, ординаты обозначены $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$, как показано на **Рис. 10.3**.

Правило прямоугольников гласит:

$$\int_a^b y\,dx \approx (\text{длина интервала})\left(\begin{array}{c}\text{сумма ординат}\\ \text{середин интервалов}\end{array}\right) \qquad (2)$$

Пример. Используя правило прямоугольников для 8 интервалов, вычислим $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Каждый из 8 интервалов будет иметь длину 0.25, ординаты их концов — 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, ..., а ординаты центров интервалов — 1.125, 1.375, 1.625, ... Соответствующие значения $\frac{2}{\sqrt{x}}$ приведены в следующей таблице.

x	1.125	1.375	1.625	1.875	2.125	2.375	2.625	2.875
$\frac{2}{\sqrt{x}}$	1.8856	1.7056	1.5689	1.4606	1.3720	1.2978	1.2344	1.1795

Из уравнения (2):

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx \approx (0.25)[1.8856 + 1.7056 + 1.5689 + 1.4606 +$$

$$+ 1.3720 + 1.2978 + 1.2344 + 1.1795] =$$

$= \mathbf{2.926}$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Как и ранее, чем больше число интервалов, тем ближе результат к истинному значению (2.928 с точностью до 3 знаков после десятичной точки).

10.8.4. Правило Симпсона

Аппроксимация, используемая в формуле трапеций, — это соединение двух соседних ординат прямой линией, т. е. использование линейной аппроксимации вида $a + bx$. Аппроксимация для правила Симпсона — соединение трех последовательных ординат параболой, т. е. квадратичная аппроксимация вида $a + bx + cx^2$.

Пусть определенный интеграл обозначается $\int_a^b y\,dx$, и он представлен площадью под графиком $y = f(x)$ в пределах между $x = a$ и $x = b$, как показано на **Рис. 10.4**. Область интегрирования $b - a$ разделена на четное количество интервалов, скажем, $2n$ длиной d.

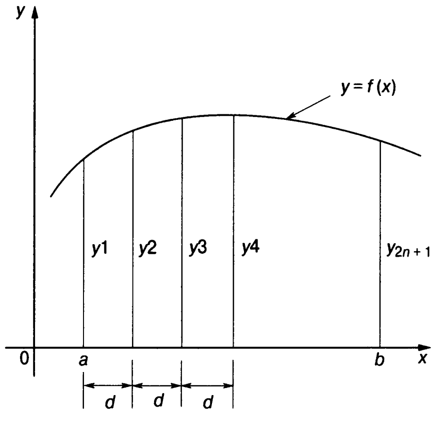


Рис. 10.4

Правило Симпсона гласит:

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{длина}\\ \text{интервала}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\text{первая +}\\ \text{последняя}\\ \text{ордината}\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}\text{сумма}\\ \text{четных}\\ \text{ординат}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\text{сумма остальных}\\ \text{нечетных ординат}\end{pmatrix}\right\}} \quad (3)$$

Отметим, что правило Симпсона можно применять только в том случае, если выбрано четное количество интервалов, т. е. нечетное количество ординат.

Пример. Используя правило Симпсона для 8 интервалов, вычислить $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

8 интервалов длиной $\frac{3-1}{8}$, т. е. 0.25 каждый, имеют ординаты 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75 и 3.00. Соответствующие значения $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ приведены в таблице на стр. 384, разд. 10.8.2.

Таким образом, из уравнения (3):

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx \approx \frac{1}{3}(0.25)[(2.0000 + 1.1547) + 4(1.7889 + 1.5119 +$$

$$+ 1.3333 + 1.2060) + 2(1.6330 + 1.4142 + 1.2649)] =$$

$$= \frac{1}{3}(0.25)[3.1547 + 23.3604 + 8.6242] =$$

$= \mathbf{2.928}$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

Отметим, что последний результат в точности совпадает с полученным при интегрировании. В общем, правило Симпсона считается наиболее точным из трех методов аппроксимации, используемых в численном интегрировании.

Пример. Переменный ток i принимает через равные интервалы по 2.0 мс следующие значения:

Время [мс]	0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0
Ток i [А]	0	3.5	8.2	10.0	7.3	2.0	0

Заряд q мКл определяется как $q = \int_0^{12.0} i dt$. Используем правило Симпсона для нахождения приблизительной величины заряда за время 12 мс.

Из уравнения (3):

$$\text{Заряд } q = \int_0^{12.0} i dt \approx \frac{1}{3}(2.0)[(0 + 0) + 4(3.5 + 10.0 + 2.0) +$$

$$+ 2(8.2 + 7.3)] = \mathbf{62\ мКл}.$$

10.9. ПЛОЩАДИ ПОД И МЕЖДУ КРИВЫМИ

10.9.1. Площадь под кривой

Площадь, заштрихованная на **Рис. 10.5**, может быть найдена посредством численных методов (правило трапеций, правило прямоугольников или правило Симпсона) или более точно — с помощью интегрирования.

Пусть A — площадь заштрихованной кривой на **Рис. 10.5**, и пусть эта площадь разбита на ряд полос шириной δx. На рисунке показана одна такая полоса, пусть ее площадь δA. Тогда

$$\delta A \approx y\delta x. \qquad (1)$$

Точность утверждения (1) увеличивается при уменьшении ширины полос, т. е. если площадь A разбита на большее количество полос.

Площадь A равна сумме площадей всех полос в пределах от $x = a$ до $x = b$, т. е.

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=h} y\delta x. \qquad (2)$$

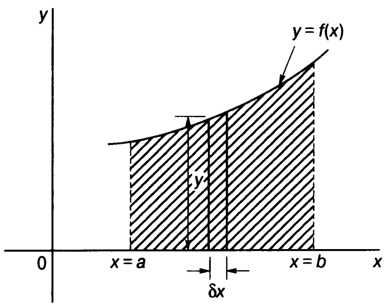


Рис.10.5

Из утверждения (1),

$$\frac{\delta A}{\delta x} \approx y. \qquad (3)$$

В пределе, когда δx стремится к нулю, $\frac{\delta A}{\delta x}$ становится производной $\frac{dA}{dx}$.

Следовательно, $\lim\limits_{\delta x \to 0}\left(\dfrac{\delta A}{\delta x}\right) = \dfrac{dA}{dx} = y$ (из утверждения (3)).

Интегрируем: $\int \dfrac{dA}{dx} dx = \int y dx$, т. е. $A = \int y dx$.

Ординаты $x = a$ и $x = b$ ограничивают площадь, и эти значения ординат показаны в качестве пределов. Следовательно,

$$A = \int_a^b y dx. \tag{4}$$

Приравниваем уравнения (2) и (4):

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} y \delta x = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Если необходимо найти площадь между кривой $x = f(y)$, осью y и ординатами $y = p$ и $y = q$, то эту площадь определяют из выражения $\int_p^q x dy$.

Нахождение площади под кривой посредством интегрирования требует вычисления определенного интеграла.

В инженерных задачах часто требуется точно найти площадь под кривой. Например, площадь между пределами графика скорость/время дает пройденное расстояние, графика сила/расстояние — проделанную работу, напряжение/ток — мощность и так далее.

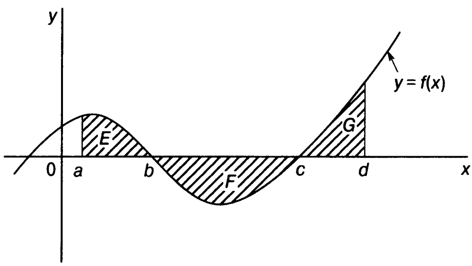


Рис. 10.6

Если кривая находится под осью x, тогда $y = f(x)$ становится отрицательной и $f(x)\ dx$ тоже. При нахождении подобных площадей интегрированием перед интегралом ставится отрицательный знак. Для кривой, показанной на **Рис. 10.6**, общая площадь заштрихованных областей равняется (площадь E + площадь F + площадь G).

Интегрируя, находим **общую площадь заштрихованной области:**

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)(dx).$$

(Отметим, что это ***не*** то же самое, что и $\int_a^d f(x)dx$.)

Как правило, бывает необходимо построить кривую, чтобы проверить, пересекает ли она ось x.

Пример. Скорость v тела через t секунд составляет $(2t^2 + 5)$ м/с. Найдем с помощью интегрирования расстояние, пройденное телом за интервал времени от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

$2t^2 + 5$ — квадратичное выражение, значит, кривая $v = 2t^2 + 5$ — это парабола, пересекающая ось v в точке $v = 5$, как показано на **Рис. 10.7**.

Пройденное расстояние определяется площадью под кривой v/t, она заштрихована на **Рис. 10.7**.

Интегрируя, находим заштрихованную площадь:

$$A = \int_0^4 v dt = \int_0^4 (2t^2 + 5)dt = \left[\frac{2t^3}{3} + 5t\right]_0^4.$$

То есть **пройденное расстояние будет 62.67 м**.

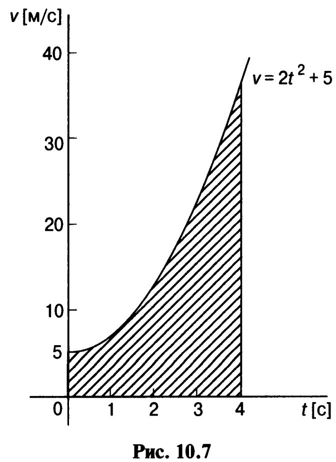


Рис. 10.7

Пример. Найти площадь, ограниченную кривой $y = \sin 2x$, осью x и ординатами $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{3}$.

График функции $y = \sin 2x$ показан на **Рис. 10.8**.

(Отметим, что $y = \sin 2x$ имеет период $\frac{2\pi}{2}$, т. е. π радиан.)

Заштрихованная площадь $A = \int_0^{\pi/3} y dx = \int_0^{(\pi/3)} \sin 2x dx =$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/3} = \left\{-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\cos 0\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - \left\{-\frac{1}{2}(1)\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \text{ **квадратных единиц**.}$$

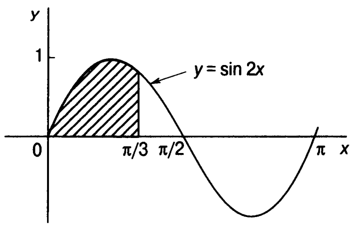


Рис. 10.8

Пример. Найти площадь между кривой $y = x^3 - 2x^2 - 8x$ и осью x.

$$y = x^3 - 2x^2 - 8x = x(x^2 - 2x - 8) = x(x + 2)(x - 4).$$

$y = 0$ при $x = 0$, или $(x + 2) = 0$, или $(x - 4) = 0$.

То есть $y = 0$ при $x = 0$, -2 или 4, значит, кривая пересекает ось x в точках 0, -2 и 4. Поскольку кривая является непрерывной, необходимо найти только еще одну координату для построения графика. При $x = 1$ имеем $y = -9$, значит, часть кривой между $x = 0$ и $x = 4$ отрицательная. График $y = x^3 - 2x^2 - 8x$ показан на **Рис. 10.9**. (Другой метод построения **Рис. 10.9** — составление таблицы значений.)

Заштрихованная площадь

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)dx - \int_0^4 (x^3 - 2x^2 - 8x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{4} =$$

$$= \left(6\frac{2}{3}\right) - \left(-42\frac{2}{3}\right) = \mathbf{49\frac{1}{3}}\ \textbf{квадратных единиц}.$$

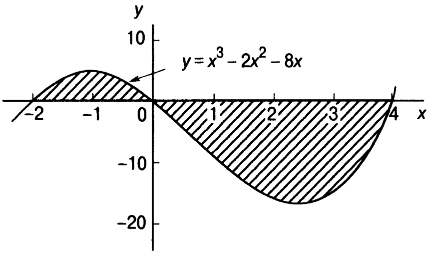


Рис. 10.9

10.9.2. Площадь между кривыми

Площадь, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и заштрихованная на **Рис. 10.10**, может быть найдена так:

$$A = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

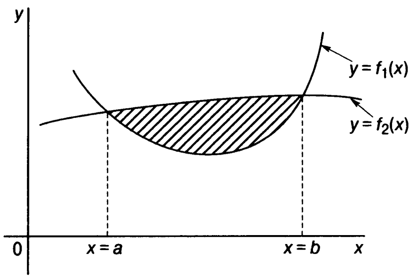


Рис. 10.10

Пример. Найти площадь, ограниченную двумя кривыми $y = x^2 + 1$ и $y = 7 - x$.

В точках пересечения кривых функции равны. Поэтому приравниваем значения y для кривых: $x^2 + 1 = 7 - x$, откуда

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Раскладываем на множители:

$$(x-2)(x+3)=0.$$

Значит, $x = 2$ и $x = -3$.

При определении точек пересечения был найден диапазон значений по x. Таблица значений представлена ниже.

x	−3	−2	−1	0	1	2
$y=x^2+1$	10	5	2	1	2	5

x	−3	0	2
$y=7-x$	10	7	5

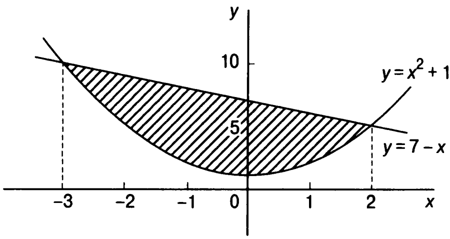


Рис. 10.11

Графики двух кривых представлены на **Рис. 10.11**. Заштрихованная на рисунке площадь

$$A=\int_{-3}^{2}(7-x)dx-\int_{-3}^{2}(x^2+1)dx=$$

$$=\int_{-3}^{2}[(7-x)-(x^2+1)]dx=\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx=\left[6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}=$$

$$=\left(12-2-\frac{8}{3}\right)-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right)=$$

$$=\left(7\frac{1}{3}\right)-\left(-13\frac{1}{2}\right)=\mathbf{20\frac{5}{6}}\ \textbf{квадратных единиц.}$$

Пример. Найти площадь, ограниченную прямыми $y = 4 - x$, $y = 3x$ и $3y = x$ посредством интегрирования.

Графики прямых построены на **Рис. 10.12**. Заштрихованная площадь

$$A=\int_{0}^{1}\left(3x-\frac{x}{3}\right)dx+\int_{1}^{3}\left[(4-x)-\frac{x}{3}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^2}{6}\right]_{-3}^{2}+\left[4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{6}\right]_{1}^{3}=$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)-(0)\right]+\left[\left(12-\frac{9}{2}-\frac{9}{6}\right)-\left(4-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]=$$

$$= \left(1\frac{1}{3}\right)+\left(6-3\frac{1}{3}\right) = 4 \text{ **квадратные единицы**}.$$

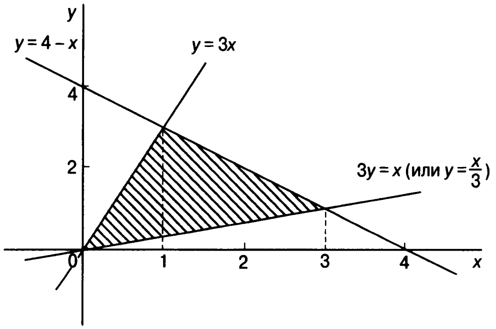


Рис. 10.12

10.10. СРЕДНЕЕ И СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЯ

10.10.1. Среднее значение

Среднее значение кривой, показанной на **Рис. 10.13**, между $x = a$ и $x = b$ определяется выражением

$$\text{среднее значение } \bar{y} = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания}}.$$

Если площадь под кривой может быть получена интегрированием, то

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y dx}{b-a}.$$

То есть

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Для периодической функции, например синусоиды, среднее значение — это среднее значение за полупериод, поскольку среднее значение за целый период равно нулю.

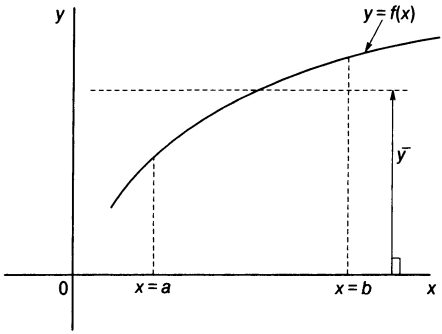


Рис. 10.13

Пример. С помощью интегрирования найти среднее значение $y = 5x^2$ в пределах от $x = 1$ до $x = 4$.

$$\text{Среднее значение } \bar{y} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 y\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 5x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{5}{9}[x^3]_1^4 = \frac{5}{9}(64-1) = \mathbf{35}.$$

Пример. Синусоидальное напряжение задается уравнением $v = 100 \sin \omega t$ вольт. С помощью интегрирования найти среднее значение напряжения за половину периода.

Половина периода — это пределы от 0 до π радиан.

$$\text{Среднее значение } \bar{v} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi v\,d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 100 \sin\omega t\,d(\omega t) =$$

$$= \frac{100}{\pi}[-\cos\omega t]_0^\pi = \frac{100}{\pi}[(-\cos\pi) - (-\cos 0)] =$$

$$= \frac{100}{\pi}[(+1) - (-1)] = \frac{200}{\pi} = \mathbf{63.66}.$$

(Отметим, что для синусоиды **среднее значение** $\bar{v} = \frac{2}{\pi} \times$ **максимальное значение**. В данном случае среднее значение $\bar{v} = \frac{2}{\pi} \times 100 = 63.66$ В.)

10.10.2. Среднее квадратичное значение

Среднее квадратичное значение величины — это корень квадратный из среднего значения возведенных в квадрат величин, взятых на определенном интервале. Из **Рис. 10.13**, среднее квадратичное значение для $y = f(x)$ в диапазоне от $x = a$ до $x = b$ дается формулой

$$\boxed{\text{среднее квадратичное значение } = \sqrt{\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2 dx\right\}}}$$

Одно из основных применений среднего квадратичного значения — теория переменных токов и напряжений. Среднее квадратичное значение переменного тока определяется как «ток, который обеспечит тот же эффект нагрева, что и эквивалентный постоянный ток».

Пример. Найти среднее квадратичное значение $y = 2x^2$ в интервале от $x = 1$ до $x = 4$.

Среднее квадратичное значение =

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{4-1}\int_1^4 y^2 dx\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{1}{3}\int_1^4 (2x^2)^2 dx\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{1}{3}\int_1^4 4x^4 dx\right\}} =$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^4\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{4}{15}(1024-1)\right\}} = \sqrt{272.8} = \mathbf{16.5}.$$

Пример. Синусоидальное напряжение имеет максимальное значение 100 В. Вычислить среднее квадратичное значение.

Синусоидальное напряжение v с максимумом 100 В можно записать в виде $v = 100 \sin \theta$. В диапазоне от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ среднее квадратичное значение =

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi v^2 d\theta\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (100\sin\theta)^2 d\theta\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta\right\}}.$$

(Это не табличный интеграл.)

В разд. 3.8 показано, что $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$, и эта формула используется для интегрирования $\sin^2 A$.

Совершаем перестановку в $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$, получаем $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$. Следовательно,

$$\sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta\right\}} =$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}\right\}} =$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\frac{1}{2}\left[\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin\theta}{2}\right)\right]\right\}} =$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{10000}{\pi}\frac{1}{2}|\pi|\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{10000}{2}\right\}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = \mathbf{70.71\ В}.$$

(Отметим, что для синусоиды **среднее квадратичное значение** $=$ $= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \times$ **максимальное значение** . В данном случае среднее квадратичное значение $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 100 = 70.71$ В.)

10.11. ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Если площадь под кривой $y = f(x)$ (показанной на **Рис. 10.14а**) в пределах от $x = a$ до $x = b$ поворачивается на 360° вокруг оси x, то получается тело, называемое *телом вращения*, оно показано на **Рис. 10.14б**.

Объем подобного тела можно точно вычислить с помощью интегрирования. Пусть показанная на **Рис. 10.14а** площадь разбита на ряд полос шириной δx каждая. На рисунке одна подобная полоса заштрихована.

При повороте площади вокруг оси x на 360° каждая полоса образует тело вращения, приближающееся к круговому диску радиусом y и толщиной δx.

Объем диска = (площадь круглого поперечного сечения) × × (толщина) = $(\pi y^2)(\delta x)$.

Полный объем V между ординатами $x = a$ и $x = b$ дается формулой

$$V = \lim_{\delta x \to 0}\sum_{x=a}^{x=b}\pi y^2\delta x = \int_a^b \pi y^2 dx\,.$$

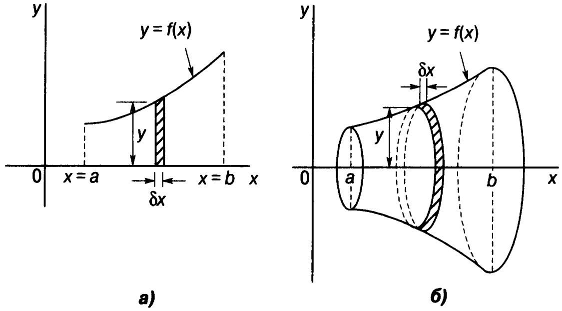


Рис. 10.14

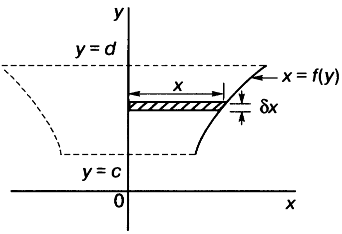


Рис. 10.15

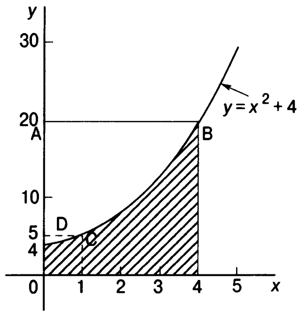


Рис. 10.16

При вращении кривой $x = f(y)$ вокруг оси y на 360° в пределах между $y = c$ и $y = d$, как показано на **Рис. 10.15**, полученный объем определяется выражением

$$V = \lim_{\delta y \to 0} \sum_{y=c}^{y=d} \pi x^2 \delta y = \int_a^b \pi x^2 dy.$$

Пример. Кривая $y = x^2 + 4$ вращается вокруг оси x на 360° в пределах от $x = 1$ до $x = 4$. Найти объем полученного тела вращения.

При вращении заштрихованной на **Рис. 10.16** площади вокруг оси x на 360° образуется тело вращения, объем которого дается формулой

$$V = \int_1^4 \pi y^2 dx = \int_1^4 \pi (x^2+4)^2 dx = \int_1^4 \pi (x^1 + 8x^2 + 16x) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_1^4 =$$

$$= \pi[(204.8 + 170.67 + 64) - (0.2 + 2.67 + 16)] =$$

$$= \mathbf{420.6\pi} \text{ **кубических единиц**.}$$

Объем, получаемый при вращении кривой $y = x^2 + 4$ вокруг оси y между $y = 5$ (при $x = 1$) и $y = 20$ (при $x = 4$), т. е. вращении площади ABCD с **Рис. 10.16**, равен $\int_5^{20} \pi x^2 dy$.

Поскольку $y = x^2 + 4$, то $x^2 = y - 4$. Следовательно,

$$V = \int_5^{20} \pi (y-4) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - 4y \right]_5^{20} = \pi[(120) - (-7.5)] =$$

$$= \mathbf{127.5\pi} \text{ **кубических единиц**.}$$

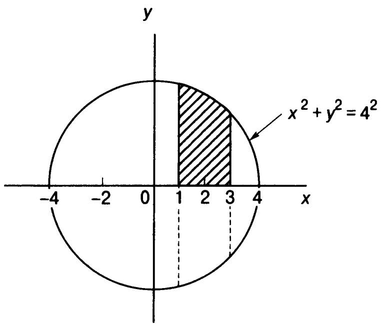


Рис. 10.17

Пример. Вычислить объем шарового слоя шара радиусом 4 см, лежащего между параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии 1 и 3 см от центра шара и с одной стороны от этого центра.

Объем шарового слоя можно найти интегрированием кривой $x^2 + y^2 = 4^2$ (т. е. окружности с центром в точке 0 и радиусом 4), повернутой на один оборот вокруг оси x в пределах от $x = 1$ до $x = 3$ (т. е. вращается заштрихованная площадь с **Рис. 10.17**).

Итак, находим объем шарового слоя:

$$V = \int_1^3 \pi y^2 dx = \int_1^3 \pi (4^2 - x^2) dx = \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 =$$

$$= \pi\left[(39) - \left(15\frac{2}{3}\right)\right] = \mathbf{23\frac{1}{3}\pi} \text{ **кубических единиц.**}$$

10.12. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ ПРОСТЫХ ФИГУР

10.12.1. Центры тяжести

Пластина — это тонкий плоский лист, имеющий равномерную толщину. *Центр тяжести пластины* — это точка, в которой она идеально сбалансирована, т. е. *центр масс.*

При рассмотрении плоской фигуры (т. е. пластины пренебрежимо малой толщины и массы) термин *центр тяжести* используется для обозначения точки, в которой находился бы центр тяжести пластины данной формы.

10.12.2. Статический момент площади

Статический момент площади — это произведение площади на расстояние от ее центра тяжести до заданной оси в плоскости этой площади. На **Рис. 10.18** статический момент площади A относительно оси XX равен ($A\,y$) кубических единиц.

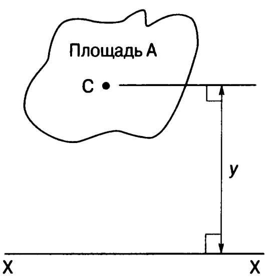


Рис. 10.18

10.12.3. Центр тяжести фигуры, ограниченной кривой и осью x

На **Рис. 10.19** показана фигура PQRS, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью x и ординатами $x = a$, $x = b$. Разобьем эту площадь на большое число полос шириной δx каждая. Подобная полоса для точки (x, y) функции $f(x)$ заштрихована на рисунке.

Площадь полосы примерно равна площади прямоугольника и составляет $y\delta x$.

Центр тяжести C имеет координаты $\left(x, \frac{y}{2}\right)$.

Статический момент площади заштрихованной полосы относительно оси OY = $(y\delta x)(x) = xy\delta x$.

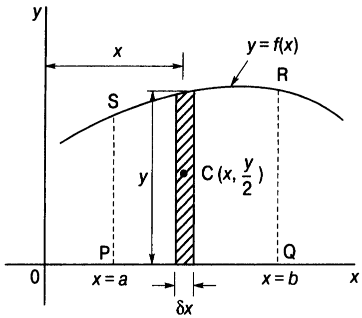


Рис. 10.19

Полный статический момент площади PQRS относительно оси OY равен

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} xy\delta x = \int_a^b xydx.$$

Статический момент заштрихованной полосы относительно оси OX равен

$$(y\delta x)\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}y^2x.$$

Полный статический момент площади PQRS относительно оси OX равен

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \frac{1}{2}y^2\delta x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx.$$

Площадь PQRS $A = \int_a^b ydx$ (из разд. 10.9).

Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — расстояния от центра тяжести площади A до OY и OX соответственно, тогда:

$(\bar{x})(A)$ = полный статический момент площади A относительно оси $\mathrm{OY} = \int_a^b xydx$, откуда

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}}$$

и $(\bar{y})(A)$ = полный статический момент площади A относительно оси OX $= \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$, откуда

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}}$$

Пример. Найти положение центра тяжести площади фигуры, ограниченной кривой $y = 3x^2$, осью x и ординатами $x = 0$ и $x = 2$.

Если $(\bar{x}, \bar{y})$ — координаты центра тяжести данной площади, то

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 xy dx}{\int_0^2 y dx} = \frac{\int_0^2 x(3x^2) dx}{\int_0^2 3x^2 dx} = \frac{\int_0^2 3x^3 dx}{\int_0^2 3x^2 dx} = \frac{\left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^2}{[x^3]_0^2} = \frac{12}{8} = \mathbf{1.5},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 y^2 dx}{\int_0^2 y dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 (3x^2)^2 dx}{8} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 9x^4 dx}{8} = \frac{\frac{9}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2}{8} = \frac{\frac{9}{2}\left[\frac{32}{5}\right]}{8} =$$

$$= \frac{18}{5} = \mathbf{3.6}.$$

Следовательно, центр тяжести находится в точке (1.5, 3.6).

10.12.4. Центр тяжести площади, ограниченной кривой и осью *y*

Если x и y — расстояние от центра тяжести фигуры EFGH на **Рис. 10.20** до OY и OX соответственно, и A — полная площадь, то, аналогично предыдущему случаю,

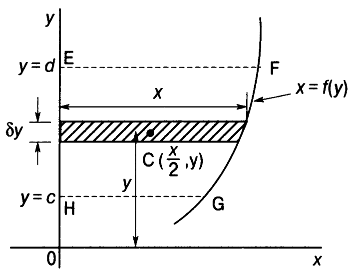


Рис. 10.20

$$(\bar{x})A = \lim_{\delta y \to 0} \sum_{y=c}^{y=d} x\delta y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_c^d x^2 dy,$$

откуда

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_c^d x^2 dy}{\int_c^d x dy}}$$

и $(\bar{y})(A) = \lim\limits_{\delta x \to 0} \sum\limits_{y=c}^{y=d} (x\delta y)y = \int\limits_c^d xydy$, откуда

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int_c^d xydy}{\int_c^d xdy}}$$

Пример. Определить положение центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $y = 2x^2$, осью y и ординатами $y = 1$ и $y = 4$ с точностью до 3 знаков после десятичной точки.

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_1^4 x^2 dy}{\int_1^4 xdy} = \frac{\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{y}{2}dy}{\int_1^4 \sqrt{\frac{y}{2}}dy} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{4}\right]_1^4}{\left[\frac{2y^{3/2}}{3\sqrt{2}}\right]_1^4} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{14}{3\sqrt{2}}} = 0.568,$$

$$\bar{y} = \frac{\int_1^4 xydy}{\int_1^4 xdy} = \frac{\int_1^4 \sqrt{\frac{y}{2}}(y)dy}{\frac{14}{3\sqrt{2}}} = \frac{\int_1^4 \frac{y^{3/2}}{\sqrt{2}}dy}{\frac{14}{3\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{y^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4}{\frac{14}{3\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5\sqrt{2}}(31)}{\frac{14}{3\sqrt{2}}} = 2.657.$$

Следовательно, центр тяжести находится в точке (0.568, 2.657).

10.12.5. Теорема Паппа

Теорема Паппа гласит:

> ***Если плоская фигура вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но не пересекающей ее, то объем полученного тела равен произведению площади на расстояние, пройденное ее центром тяжести.***

Из **Рис. 10.21**: если кривая $y = f(x)$ совершает один оборот вокруг оси x в пределах от $x = a$ до $x = b$, тогда полученный объем V определяется выражением $V = (A)(2\pi\bar{y})$, откуда

$$\boxed{\bar{y} = \frac{V}{2\pi A}}$$

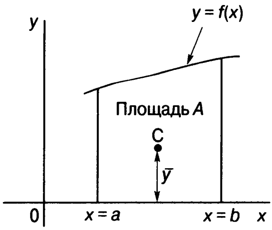


Рис. 10.21

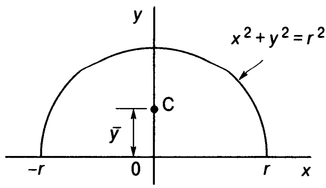


Рис. 10.22

Пример. Найти с помощью теоремы Паппа положение центра тяжести полукруга радиусом r.

Полукруг показан на **Рис. 10.22**, его диаметр лежит на оси x, а центр — в начале координат. Площадь полукруга равна $\frac{\pi r^2}{2}$. При вращении площади вокруг оси x на один оборот образуется сфера объемом $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Пусть центр тяжести C находится на расстоянии y от начала координат, как показано на **Рис. 10.22**. Из теоремы Паппа, полученный объем = площадь × расстояние, пройденное центром тяжести, т. е.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi\bar{y}, \text{ следовательно, } \bar{y} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Проверка. Интегрируем:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-r}^{r} y^2 dx}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx}{\frac{\pi r^2}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right]_{-r}^{r}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Следовательно, центр тяжести полукруга лежит на оси симметрии на расстоянии $\frac{4r}{3\pi}$ (или $0.424r$) от диаметра.

Пример. Определить: а) площадь, ограниченную кривой $y = 2x^2$, осью x и ординатами $x = 0$ и $x = 3$, б) объем тела вращения, если площадь вращается вокруг оси x, в) объем тела вращения, если эта же площадь вращается вокруг оси y, и г) положение центра тяжести посредством интегрирования и теоремы Паппа.

а) Искомая площадь заштрихована на **Рис. 10.23**.

$$A = \int_0^3 y dx = \int_0^3 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \textbf{18 квадратных единиц.}$$

б) При повороте заштрихованной площади на **Рис. 10.23** на 360° вокруг оси x полученный объем определяется выражением

$$V = \int_0^3 \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi (2x^2)^2 dx = \int_0^3 4\pi x^4 dx =$$

$$= 4\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = 4\pi\left(\frac{243}{5}\right) = \textbf{194.4}\ \pi\ \textbf{кубических единиц.}$$

в) При повороте заштрихованной площади на **Рис. 10.23** на 360° вокруг оси y полученный объем = (объем, создаваемый $x = 3$) – (объем, создаваемый $y = 2x^2$):

$$V = \int_0^{18} \pi (3)^2 dy - \int_0^{18} \pi\left(\frac{y}{2}\right) dy = \pi \int_0^{18}\left(9 - \frac{y}{2}\right) dy = \pi\left[9y - \frac{y^2}{4}\right]_0^{18} =$$

$$= \textbf{81}\pi\ \textbf{кубических единиц.}$$

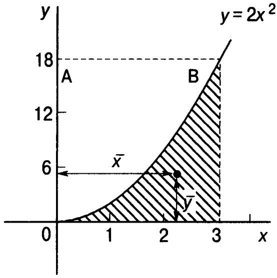


Рис. 10.23

г) Если координаты центра тяжести заштрихованной фигуры на **Рис. 10.23** суть (x, y), то:

- По методу интегрирования:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 xy\,dx}{\int_0^3 y\,dx} = \frac{\int_0^3 x(2x^2)\,dx}{18} = \frac{\int_0^3 2x^3\,dx}{18} = \frac{\left[\frac{24x^4}{4}\right]_0^3}{18} = \frac{81}{36} = \mathbf{2.25},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 y^2\,dx}{\int_0^3 y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 (2x^2)^2\,dx}{18} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 4x^4\,dx}{18} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^3}{18} = \mathbf{5.4}.$$

- По теореме Паппа:

Объем, полученный при повороте заштрихованной площади вокруг оси OY, равен (площадь) × $(2\pi\bar{x})$, т. е. $V = 81\pi =$ $(18) \times (2\pi\bar{x})$, откуда $\bar{x} = \dfrac{81\pi}{36\pi} = \mathbf{2.25}$.

Объем, полученный при повороте заштрихованной площади вокруг оси OX, равен (площадь) × $(2\pi\bar{y})$, т. е. $V = 194.4\pi =$ $= (18) \times (2\pi\bar{y})$, откуда $\bar{y} = \dfrac{194.4\pi}{36\pi} = \mathbf{5.4}$.

Следовательно, центр тяжести заштрихованной фигуры на Рис. 10.23 находится в точке (2.25, 5.4).

10.13. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРАВИЛЬНЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР

10.13.1. Моменты инерции

Статический момент площади плоской фигуры относительно фиксированной оси, находящейся на расстоянии y от центра тяжести пластины площадью A, равен Ay кубических единиц. Момент инерции той же пластины определяется как Ay^2, т. е. расстояние от фиксированной оси до центра тяжести пластины возводится в квадрат.

Моменты инерции обычно обозначают I, единицы измерения — мм^4, см^4 и так далее.

10.13.2. Радиус инерции

Несколько площадей a_1, a_2, a_3, ..., лежащих на расстояниях y_1, y_2, y_3, ... от фиксированной оси, могут быть заменены одной площадью A, где $A = a_1 + a_2 + a_3 + ...$, расположенной на расстоянии k от оси, таком, что $Ak^2 = \sum ay^2$. Расстояние k называется ***радиусом инерции*** площади A относительно заданной оси. Поскольку $Ak^2 = \sum ay^2 = I$, значит, радиус инерции

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}.$$

Момент инерции площади — это величина, часто используемая в теории изгиба балок, кручения валов и в вычислениях, касающихся свободных поверхностей воды и центров давления.

Процедура определения момента инерции правильной плоской фигуры относительно оси x такова: сначала найти момент инерции площади типового элемента и затем просуммировать все моменты инерции площадей, проинтегрировав в соответствующих пределах. Например, момент инерции площади прямоугольника, показанного на **Рис. 10.24**, относительно оси PP, определяется при рассмотрении элементарной полосы шириной δx, параллельной оси PP и расположенной на расстоянии x от нее. Площадь заштрихованной полосы равна $b\delta x$. Момент инерции площади заштрихованной полосы относительно *PP* равен $(x^2)(b\delta x)$.

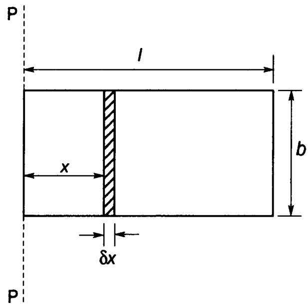


Рис. 10.24

Момент инерции площади целого прямоугольника относительно PP определяется суммой моментов инерции всех полос между $x = 0$ и $x = 1$, т. е. $\sum_{x=0}^{x=l} x^2 b\delta x$.

Фундаментальная теорема интегрирования гласит, что

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=0}^{x=l} x^2 b\delta x = \int_0^l x^2 b\,dx.$$

Таким образом, момент инерции площади прямоугольника относительно PP равен

$$b\int_0^l x^2 dx = b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{\mathbf{bl^3}}{\mathbf{3}}.$$

Поскольку полная площадь прямоугольника $A = lb$, то $I_{PP} = (lb)\left(\frac{l^2}{3}\right) = \frac{\mathbf{Al^2}}{\mathbf{3}}$. Так как $I_{PP} = Ak_{PP}^2$, то $k_{PP}^2 = \frac{l^2}{3}$. То есть радиус инерции относительно оси PP, $k_{PP} = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{\mathbf{l}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$.

10.13.3. Теорема о параллельных осях

На **Рис. 10.25** ось GG проходит через центр тяжести C площади A. Оси DD и GG находятся в одной плоскости, они параллельны и расстояние между ними равно d.

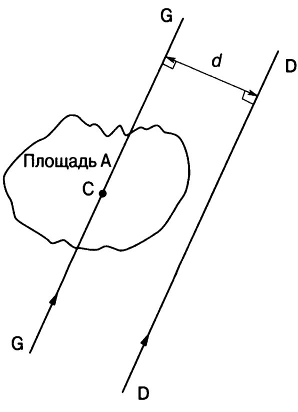


Рис. 10.25

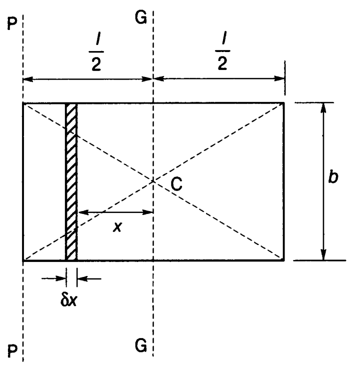


Рис. 10.26

Теорема о параллельных осях гласит:

$$I_{DD} = I_{GG} + Ad^2.$$

С помощью теоремы о параллельных осях можно найти момент инерции площади прямоугольника относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Для прямоугольника, показанного на **Рис. 10.26**, $I_{PP} = \frac{bl^3}{3}$ (из сказанного выше).

Согласно теореме о параллельных осях,

$$I_{PP} = I_{GG} + (bl)\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

т. е. $\frac{bl^3}{3} = I_{GG} + \frac{bl^3}{4}$, откуда $\boldsymbol{I_{GG}} = \frac{bl^3}{3} - \frac{bl^3}{4} = \boldsymbol{\frac{bl^3}{12}}$.

10.13.4. Теорема о перпендикулярных осях

На **Рис. 10.27** оси OX, OY и OZ перпендикулярны. При условии, что OX и OY лежат в плоскости площади A, теорема о перпендикулярных осях гласит:

$$I_{OZ} = I_{OX} + I_{OY}.$$

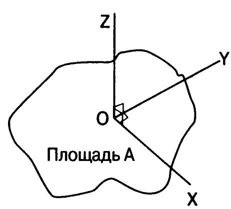


Рис. 10.27

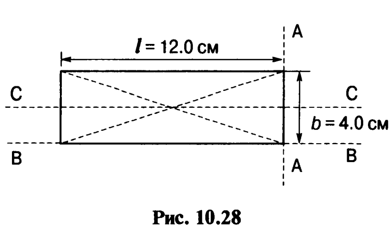


Рис. 10.28

Стандартные моменты и радиусы *инерции* правильных фигур приведены в **Табл. 10.3**.

Таблица 10.3. *Стандартные моменты и радиусы инерции*

Фигура	Положение оси	Момент инерции сечения, I	Радиус инерции, k
Прямоугольник, длина l, ширина b	Совпадает с b	$\frac{bl^3}{3}$	$\frac{l}{\sqrt{3}}$
	Совпадает с l	$\frac{lb^3}{3}$	$\frac{b}{\sqrt{3}}$
	Через центр тяжести параллельно b	$\frac{bl^3}{12}$	$\frac{l}{\sqrt{12}}$
	Через центр тяжести параллельно l	$\frac{lb^3}{12}$	$\frac{b}{\sqrt{12}}$
Треугольник, высота h, основание b	Совпадает с b	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{\sqrt{6}}$
	Через центр тяжести параллельно основанию	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{h}{\sqrt{18}}$
	Через вершину параллельно основанию	$\frac{bh^3}{4}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$
Круг, радиус r	Через центр перпендикулярно плоскости (т. е. полярная ось)	$\frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{r}{\sqrt{2}}$
	Совпадает с диаметром	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{r}{2}$
	По касательной	$\frac{5\pi r^4}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}r$
Полукруг, радиус r	Совпадает с диаметром	$\frac{\pi r^4}{8}$	$\frac{r}{2}$

Пример. Найти моменты и радиусы инерции относительно осей AA, BB и CC для прямоугольника, показанного на **Рис. 10.28**.

Из **Табл. 10.3**, момент инерции площади относительно оси AA:

$$I_{AA} = \frac{bl^3}{3} = \frac{(4.0)(12.0)^3}{3} = \mathbf{2304\ см^4}.$$

Радиус инерции $k_{AA} = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \mathbf{6.93\ см}$. Аналогично

$$I_{BB} = \frac{lb^3}{3} = \frac{(12.0)(4.0)^3}{3} = \mathbf{256\ см^4}$$

и

$$k_{BB} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{4.0}{\sqrt{3}} = \mathbf{2.31\ см.}$$

Если проходящая через центр тяжести ось параллельна ширине b, тогда момент инерции площади относительно центра тяжести прямоугольника равен $\frac{bl^3}{12}$. В этом случае ось CC параллельна l. Следовательно, $I_{CC} = \frac{lb^3}{12} = \frac{(12.0)(4.0)^3}{12} = \mathbf{64\ см^4}$ и $k_{CC} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{4.0}{\sqrt{12}} = \mathbf{1.15\ см.}$

Пример. Найти момент и радиус инерции относительно оси PP для прямоугольника, показанного на **Рис. 10.29**.

$$I_{GG} = \frac{lb^3}{12}, \text{ где } l = 40 \text{ мм и } b = 15.0 \text{ мм . Следовательно,}$$

$$I_{GG} = \frac{(40.0)(15.0)^3}{12} = 11\,250 \text{ мм}^4 .$$

Согласно теореме о параллельных осях, $I_{PP} = I_{GG} + Ad^2$, где $A = 40.0 \times 15.0 = 600$ мм^2, а $d = 25.0 + 7.5 = 32.5$ мм; это расстояние между GG и PP. Следовательно, $I_{PP} = 11\,250 + (600)(32.5)^2 =$ $= 645\,000$ мм^4.

$$I_{PP} = Ak_{PP}^2 ,$$

откуда $k_{PP} = \sqrt{\frac{I_{PP}}{A}} = \sqrt{\left(\frac{645\,000}{600}\right)} = \mathbf{32.79\ мм.}$

Пример. Найти момент и радиус инерции относительно оси QQ для треугольника BCD, показанного на **Рис. 10.30**.

Используем теорему о параллельных осях: $I_{QQ} = I_{GG} + Ad^2$, где I_{GG} — момент инерции треугольника относительно его центра тяжести, A — это площадь треугольника, а d — расстояние между осями GG и QQ. То есть

$$I_{GG} = \frac{bh^3}{36} = \frac{(8.0)(12.0)^3}{36} = 384 \text{ см}^4,$$

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(8.0)(12.0) = 48 \text{ см}^2,$$

$$d = 6.0 + \frac{1}{3}(12.0) = 10 \text{ см}.$$

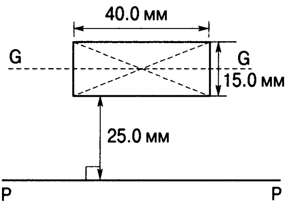


Рис. 10.29

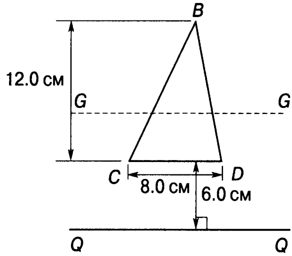


Рис. 10.30

Следовательно, момент инерции относительно оси QQ,

$$I_{QQ} = 384 + (48)(10)^2 = \mathbf{5184 \text{ см}^4}.$$

Радиус инерции $k_{QQ} = \sqrt{\frac{I_{QQ}}{A}} = \sqrt{\frac{5184}{48}} = \mathbf{10.4 \text{ см}}.$

Пример. Найти полярный момент инерции поперечного сечения вала пропеллера, показанного на **Рис. 10.31**.

Полярный момент инерции круга равен $\frac{\pi r^4}{2}$.

Полярный момент инерции заштрихованной площади равен полярному моменту инерции круга радиусом 7.0 см минус полярный момент инерции круга радиусом 6.0 см.

Следовательно, полярный момент инерции показанного на рисунке поперечного сечения вала равен

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{7.0}{2}\right)^4 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{6.0}{2}\right)^4 = 235.7 - 127.2 = \mathbf{108.5 \text{ см}^4}.$$

Пример. Найти момент инерции сложной фигуры на **Рис. 10.32** относительно оси XX с точностью до 3 значащих цифр.

Для полукруга $I_{XX} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi(4.0)^4}{8} = 100.5 \text{ см}^4.$

Для прямоугольника $I_{XX} = \frac{bl^3}{3} = \frac{(6.0)(8.0)^3}{3} = 1024 \text{ см}^4.$

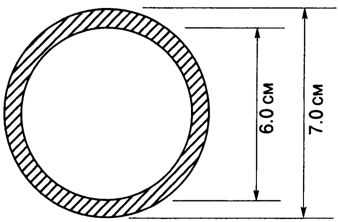


Рис. 10.31

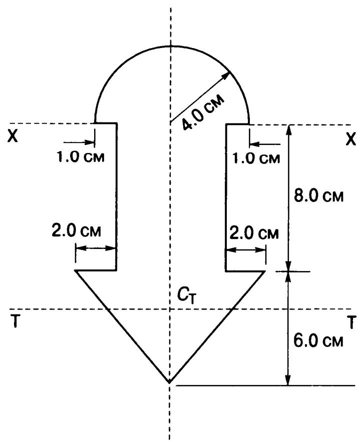


Рис. 10.32

Для треугольника момент инерции относительно оси ТТ, проходящей через центр тяжести C_T, равен

$$I_{TT} = \frac{bh^3}{36} = \frac{(10)(6.0)^3}{36} = 60 \text{ см}^4.$$

По теореме о параллельных осях, момент инерции треугольника относительно оси XX равен

$$60 + \left[\frac{1}{2}(10)(6.0)\right]\left[8.0 + \frac{1}{3}(6.0)\right]^2 = 3060 \text{ см}^4.$$

Полный момент инерции сечения относительно оси XX равен 100.5 + 1024 + 3060 = 4184.5 = **4180 см^4** с точностью до 3 значащих цифр.

Глава 11

Дифференциальные уравнения

11.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

11.1.1. Семейство кривых

Интегрирование обеих частей производной $\frac{dy}{dx} = 3$ по x дает $y = \int 3\,dx$, т. е. $y = 3x + c$, где c — произвольная константа. Уравнение $y = 3x + c$ задает *семейство кривых,* где каждая кривая семейства зависит от значения c. Примеры семейств кривых: $y = 3x + 8$, $y = 3x + 3$, $y = 3x$ и $y = 3x - 10$; эти кривые показаны на **Рис. 11.1**. Тангенс угла наклона каждой кривой равен 3. Определенную кривую семейства можно найти, если задана точка на этой кривой. Таким образом, если $y = 3x + c$ проходит через точку (1, 2), значит, $2 = 3(1) + c$, откуда $c = -1$. Уравнение кривой, проходящей через точку (1, 2): $y = 3x - 1$.

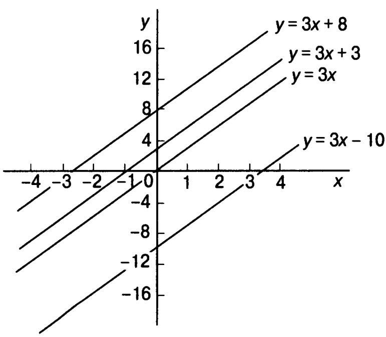


Рис. 11.1

11.1.2. Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение — это уравнение, содержащее производные неизвестной функции (или несколько неизвестных функций). Примеры таких уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = 7x \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Дифференциальные уравнения классифицируют в зависимости от содержащейся в них производной наибольшего порядка. Таким образом, первый пример — это *дифференциальное уравнение первого порядка*, второй — *дифференциальное уравнение второго порядка.*

Степень дифференциального уравнения — это наибольший показатель степени при производной наибольшего порядка, которую уравнение содержит после упрощения.

Таким образом, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = 7$ — это дифференциальное уравнение второго порядка третьей степени.

Имея дифференциальное уравнение и достаточно информации для определения неизвестных констант, исходную функцию можно найти посредством интегрирования. Данный процесс называется *решением дифференциального уравнения.*

Решение дифференциального уравнения, содержащее одну или более произвольную постоянного интегрирования, называется *общим решением* дифференциального уравнения.

Если имеется дополнительная информация, позволяющая определить постоянные интегрирования, можно получить *частное решение* дифференциального уравнения. Эта дополнительная информация называется *граничными условиями.* Выше было показано, что $y = 3x + c$ — общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = 3$. Если заданы граничные условия $x = 1$ и $y = 2$, то частное решение имеет вид $y = 3x - 1$.

11.1.3. Разделение переменных

Все уравнения, которые можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ и $\frac{dy}{dx} = f(x)f(y)$, могут быть решены посредством интегрирования. В каждом случае можно отделить y в одной части уравнения и x — в другой. Поэтому данный метод решения таких уравнений называют *разделением переменных.*

Решение уравнений вида dy/dx = f(x)

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$ можно решить прямым интегрированием, т. е.

$$\boxed{y = \int f(x)\,dx}$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $5\frac{dy}{dx}+2x = 3$, если задано граничное условие $y = 1\frac{2}{5}$ при $x = 2$.

Поскольку $5\frac{dy}{dx}+2x = 3$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{3-2x}{5} = \frac{3}{5}-\frac{2x}{5}$.

Следовательно, $y = \int\left(\frac{3}{5}-\frac{2x}{5}\right)dx$. То есть $y = \frac{3x}{5}-\frac{x^2}{5}+c$, и это общее решение.

Подставляем граничные условия $y = 1\frac{2}{5}$ и $x = 2$ для определения c, получаем $1\frac{2}{5} = \frac{6}{5}-\frac{4}{5}+c$, откуда $c = 1$.

Следовательно, частное решение есть $\boldsymbol{y = \frac{3x}{5}-\frac{x^2}{5}+1}$.

Решение уравнений вида dy/dx = f(y)

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(y)$ следует преобразовать к виду $dx = \frac{dy}{f(y)}$, далее решение находят посредством прямого интегрирования, т. е.

$$\boxed{\int dx = \int\frac{dy}{f(y)}}$$

Пример. Найти частное решение уравнения $(y^2-1)\frac{dy}{dx} = 3y$ при условии, что $y = 1$ при $x = 2\frac{1}{6}$.

Совершаем перестановку: $dx = \left(\frac{y^2-1}{3y}\right)dy = \left(\frac{y}{3}-\frac{1}{3y}\right)dy$.

Интегрируем: $\int dx = \int\left(\frac{y}{3}-\frac{1}{3y}\right)dy$.

То есть $x = \frac{y^2}{6}-\frac{1}{3}\ln y+c$ — это общее решение.

$x = 2\frac{1}{6}$ при у = 1, значит, $2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 1+c$, откуда $c = 2$.

Следовательно, частное решение: $x = \frac{y^2}{6} - \frac{1}{3}\ln y + 2$.

Решение уравнений вида dy/dx = f(x)f(y)

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)f(y)$, где $f(x)$ — функция, зависящая только от x, и $f(y)$ — функция, зависящая только от y, может быть приведено к виду $\frac{dy}{f(y)} = f(x)dx$, и тогда решение можно найти прямым интегрированием, т. е.:

$$\boxed{\int\frac{dy}{f(y)} = \int f(x)dx}$$

Пример. Решить уравнение $4xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$.

Разделяем переменные: $\left(\frac{4y}{y^2-1}\right)dy = \frac{1}{x}dx$.

Интегрируем обе части: $\int\left(\frac{4y}{y^2-1}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Используем подстановку $u = y^2 - 1$ и находим общее решение:

$$2\ln(y^2 - 1) = \ln x + c.$$

Пример. Ток i в электрической схеме, содержащей сопротивление R и индуктивность L последовательно с источником напряжения E, задается дифференциальным уравнением $E - L\left(\frac{di}{dt}\right) = Ri$. Решить это уравнение, чтобы найти зависимость i от времени t при условии, что когда $i = 0$, $t = 0$.

В последовательной RL-схеме, показанной на **Рис 11.2**, источник E описывется уравнением

$$E = V_R + V_L,$$

где

$$V_R = iR \text{ и } V_L = L\frac{di}{dt}.$$

Следовательно, $E = iR + L\frac{di}{dt}$, откуда $E - L\frac{di}{dt} = Ri$.

Расчет большинства электрических цепей сводится к решению дифференциальных уравнений.

Совершаем перестановку: $E - L\dfrac{di}{dt} = Ri$ и $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E-Ri}{L}$.

Разделяем переменные: $\dfrac{di}{E-Ri} = \dfrac{dt}{L}$.

Интегрируем обе части: $\displaystyle\int\frac{di}{E-Ri} = \int\frac{dt}{L}$.

Следовательно, общее решение — это $-\dfrac{1}{R}\ln(E-Ri) = \dfrac{t}{L}+c$.

(Делаем подстановку $u = E - Ri$, см. разд. 10.2.)

Если $t = 0, i = 0$, то $-\dfrac{1}{R}\ln E = c$.

Итак, частное решение — это $-\dfrac{1}{R}\ln(E-Ri) = \dfrac{t}{L} - \dfrac{1}{R}\ln E$.

Совершаем перестановку: $-\dfrac{1}{R}\ln(E-Ri) + \dfrac{1}{R}\ln E = \dfrac{t}{L}$,

$$\frac{1}{R}[\ln E - \ln(E-Ri)] = \frac{t}{L},$$

$$\ln\left(\frac{E}{E-Ri}\right) = \frac{Rt}{L}, \text{ откуда } \frac{E}{E-Ri} = e^{Rt/L}.$$

Значит, $\dfrac{E-Ri}{E} = e^{-Rt/L}$ и $E - ri = Ee^{-Rt/L}$ и $Ri = E - Ee^{-Rt/L}$.

Итак, ток определяется законом $i = \dfrac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$; это закон нарастания тока в индуктивной схеме, как показано на **Рис. 11.3**.

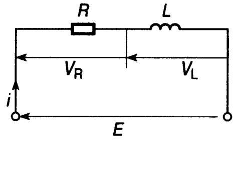


Рис. 11.2

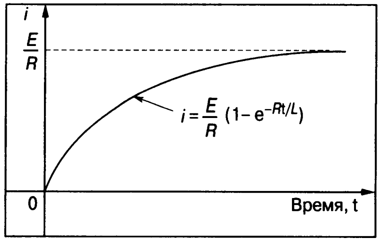


Рис. 11.3

11.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

11.2.1. Введение

В некоторых дифференциальных уравнениях нельзя сразу разделить переменные, но можно сделать это после замены переменной.

Говорят, что уравнение вида $P\frac{dy}{dx} = Q$, где P и Q — алгебраические функции, каждый член которых имеет одну и ту же степень по совокупности переменных x и y, *однородно* относительно x и y. Например, $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ — однородная функция, поскольку каждый из трех членов имеет степень 2. Аналогично функция $f(x,y) = \frac{x-3y}{2x+y}$ однородна по x и y, поскольку все четыре члена имеют степень 1. Однако $f(x,y) = \frac{x^2-y}{2x^2+y^2}$ — неоднородная функция, поскольку член с y в числителе имеет степень 1, а остальные три члена — степень 2.

11.2.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $P(dy/dx) = Q$

Шаг 1. Преобразовываем $P\frac{dy}{dx} = Q$ к виду $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$.

Шаг 2. Делаем подстановку $y = vx$ (где v — это функция от x), откуда $\frac{dy}{dx} = v(1) + x\frac{dv}{dx}$ по правилу дифференцирования произведения.

Шаг 3. Подставляем y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$. Упрощаем его посредством сокращения и в итоге получаем уравнение, где можно разделить переменные.

Шаг 4. Разделяем переменные и решаем уравнение методом из разд. 11.1.

Шаг 5. Подставляем $v = \frac{y}{x}$ для выражения решения уравнения в исходных переменных.

Пример. Найти частное решение уравнения $x\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{y}$, если заданы граничные условия $x = 1$ при $y = 4$.

Следуем рассмотренной выше процедуре:

Шаг 1. Совершаем перестановку $x\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{y}$, в итоге получаем $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$; это однородное уравнение по x и y, поскольку все три члена в правой части находятся в одной степени (т. е. 2).

Шаг 2. Пусть $y = vx$, тогда $\frac{dy}{dx} = v(1) + x\frac{dv}{dx}$.

Шаг 3. Делаем подстановку для y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{x(vx)} = \frac{x^2+v^2x^2}{vx^2} = \frac{1+v^2}{v}.$$

Шаг 4. Разделяем переменные:

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} - v = \frac{1+v^2-v^2}{v} = \frac{1}{v}.$$

Следовательно, $v dv = \frac{1}{x}dx$.

Интегрируем обе части:

$$\int v dv = \int \frac{1}{x}dx, \text{ т. е. } \frac{v^2}{2} = \ln x + c.$$

Шаг 5. Подставляем $\frac{y}{x}$ вместо v: $\frac{y^2}{2x^2} = \ln x + c$, это и есть общее решение. Если $x = 1$, $y = 4$, то $\frac{16}{2} = \ln 1 + c$, откуда $c = 8$.

Следовательно, **частное решение — это** $\mathbf{\frac{y^2}{2x^2} = \ln x + 8}$ **или**

$$\mathbf{y^2 = 2x^2(\ln x + 8)}.$$

11.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

11.3.1. Введение

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q — функции, зависящие только от x, называется *линейным дифференциальным уравнением,* поскольку y и его производные имеют первую степень.

Решение уравнения $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ получают посредством умножения на *интегрирующий множитель.*

Умножая $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, скажем, на R — функцию, зависящую только от x, получаем

$$R\frac{dy}{dx} + RPy = RQ. \qquad (1)$$

Производную произведения Ry находят по правилу дифференцирования произведения, т. е. $\frac{d}{dx}((Ry)) = R\frac{dy}{dx} + y\frac{dR}{dx}$, а это совпадает с левой частью уравнения (1), если R выбрано так, что $RP = \frac{dR}{dx}$. Если $\frac{dR}{dx} = RP$, разделение переменных дает $\frac{dR}{R} = Pdx$.

Интегрируем обе части: $\int\frac{dR}{R} = \int Pdx$, т. е. $\ln R = \int Pdx + c$,

откуда $R = e^{\int Pdx + c} = e^{\int Pdx}e^c$, т. е. $R = Ae^{\int Pdx}$, где $A = e^x = a$ постоянная.

Подставляем $R = Ae^{\int Pdx}$ в уравнение (1):

$$Ae^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + Ae^{\int Pdx}Py = Ae^{\int Pdx}Q,$$

т. е.

$$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\int Pdx}Py = e^{\int Pdx}Q. \qquad (2)$$

Левая часть уравнения (2) — это $\frac{d}{dx}(\left(ye^{\int Pdx}\right))$, что можно проверить дифференцированием $ye^{\int Pdx}$ по x, согласно правилу дифференцирования произведения.

Из уравнения (2): $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right) = e^{\int P dx} Q$. Интегрируем обе части:

$$\boxed{ye^{\int P\,dx} = \int e^{\int P\,dx} Q\,dx} \qquad (3)$$

$e^{\int P\,dx}$ — это *интегрирующий множитель.*

11.3.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $dy/dx + Py = Q$

Шаг 1. Преобразуем дифференциальное уравнение к виду $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q — функции от x.

Шаг 2. Находим $\int P\,dx$.

Шаг 3. Находим интегрирующий множитель $e^{\int P\,dx}$.

Шаг 4. Подставляем $e^{\int P\,dx}$ в уравнение (3).

Шаг 5. Интегрируем правую часть уравнения (3) для получения общего решения дифференциального уравнения. Зная граничные условия, находим частное решение.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4y = 2$ с граничными условиями $x = 0$ при $y = 4$.

Применим рассмотренную выше процедуру:

Шаг 1. В результате преобразования получаем $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2x$; это уравнение вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где $P = 4x$ и $Q = 2x$.

Шаг 2. $\int P\,dx = \int 4x\,dx = 2x^2$.

Шаг 3. Интегрирующий множитель $e^{\int P dx} = e^{2x^2}$.

Шаг 4. Совершаем подстановку в уравнение (3):

$$ye^{2x^2} = \int e^{2x^2}(2x)dx.$$

Шаг 5. Следовательно, общее решение — это $ye^{2x^2} = \frac{1}{2}e^{2x^2} + c$; используем подстановку $u = 2x^2$.

Если $x = 0, y = 4$, то $4e^0 = \frac{1}{2}e^0 + c$, откуда $c = \frac{7}{2}$.

Итак, частное решение есть $ye^{2x^2} = \frac{1}{2}e^{2x^2} + \frac{7}{2}$, т. е. $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{-2x^2}$,

или $y = \frac{1}{2}(1 + 7e^{-2x^2})$.

11.4. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

11.4.1. Введение

Уравнение вида $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$, где a, b и c — константы, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Если правая часть уравнения равна нулю, то его называют *однородным дифференциальным уравнением*. Если правая часть уравнения не равна нулю (как в разд. 11.5), то его называют *неоднородным дифференциальным уравнением*.

Существует множество инженерных примеров уравнений второго порядка. Приведем два примера:

1. $L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$ представляет собой уравнение для заряда q в электрической схеме, содержащей последовательно соединенные сопротивление R, индуктивность L и емкость C.

2. Уравнение $m\frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} + ks = 0$ задает механическую систему, где s — расстояние до фиксированной точки через t секунд, m — масса, a — коэффициент демпфирования, k — жесткость пружины.

Если D представляет $\frac{d}{dx}$, а D^2 — это $\frac{d^2}{dx^2}$, то рассмотренное уравнение можно записать в виде $(aD^2 + bD + c)y = 0$. Это называют *записью уравнения в операторной форме*.

Если $y = Ae^{mx}$, то $\frac{dy}{dx} = Ame^{mx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$.

Подстановка этих выражений в

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

дает $a(Am^2e^{mx}) + b(Ame^{mx}) + c(Ae^{mx}) = 0$, т. е.

$$Ae^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Таким образом, $y = Ae^x$ — это решение заданного уравнения при условии, что

$$(am^2 + bm + c) = 0.$$

Уравнение $am^2 + bm + c = 0$ называется *вспомогательным уравнением*; поскольку это квадратное уравнение, m находят либо методом разложения на множители, либо применением формулы корней квадратного уравнения. Поскольку во вспомогательном уравнении a, b и c — действительные числа, значит, уравнение может иметь:

- два различных действительных корня (при $b^2 > 4ac$);
- два равных действительных корня (при $b^2 = 4ac$);
- два комплексных корня (при $b^2 < 4ac$).

11.4.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $a(d^2y/dx^2) + b(dy/dx) + cy = 0$

Шаг 1. Записываем дифференциальное уравнение вида $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$ как $(aD^2 + bD + c)y = 0$.

Шаг 2. Подставляем m вместо D и решаем вспомогательное уравнение $am^2 + bm + c = 0$ относительно m.

Шаг 3. Если корни вспомогательного уравнения:

- ***Действительные и разные***, скажем, $m = \alpha$ и $m = \beta$, тогда общее решение

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}.$$

- ***Действительные и равные***, скажем, $m = \alpha$, тогда общее решение

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}.$$

- ***Комплексные***, скажем, $m = \alpha \pm j\beta$, тогда общее решение

$$y = e^{\alpha x}\{A\cos\beta x + B\sin\beta x\}.$$

Шаг 4. Если заданы граничные условия, то можно определить постоянные A и B и найти *частное решение* дифференциального уравнения. Частное решение дифференциального уравнения можно проверить подстановкой в исходное уравнение выражений для y, $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Пример. Решить $2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-3y = 0$ при условии, что $x = 0$, $y = 4$ и $\frac{dy}{dx} = 9$.

Применим рассмотренную выше процедуру:

Шаг 1. $2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-3y = 0$ в операторной форме есть $(2D^2 + 5D - 3)y = 0$, где $D \equiv \frac{d}{dx}$.

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение $2m^2 + 5m - 3 = 0$.

Разлагаем на множители: $(2m - 1)(m + 3) = 0$, откуда $m = \frac{1}{2}$ или $m = -3$.

Шаг 3. Поскольку корни действительные и разные, **общее решение — это $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{-3x}$**.

Шаг 4. Если $x = 0$, $y = 4$, то

$$4 = A + B. \tag{1}$$

Поскольку $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{-3x}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x} - 3Be^{-3x}$.

Если $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 9$, то

$$9 = \frac{1}{2}A - 3B. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получаем $A = 6$ и $B = -2$.

Следовательно, частное решение есть $y = 6e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-3x}$.

Пример. Решить $9\frac{d^2y}{dt^2}-24\frac{dy}{dt}+16y = 0$ с условием, что при $t = 0$ имеем $y = \frac{dy}{dt} = 3$.

Шаг 1. $9\frac{d^2y}{dt^2}-24\frac{dy}{dt}+16y = 0$ в операторной форме есть $(9D^2 - 24D + 16)y = 0$, где $D \equiv \frac{d}{dt}$.

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение $9m^2 - 24m + 16 = 0$.

Разлагаем на множители: $(3m - 4)(3m - 4) = 0$, т. е. $m = \frac{4}{3}$ дважды.

Шаг 3. Поскольку корни действительные и равные, **то общее решение есть** $y = (At + B)e^{\frac{4}{3}t}$.

Шаг 4. Если $t = 0$, $y = 3$, то $3 = (0 + B)e^0$, т. е. $B = 3$. Поскольку $y = (At + B)e^{\frac{4}{3}t}$, то $\frac{dy}{dt} = (At + B)\left(\frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}t}\right) + Ae^{\frac{4}{3}t}$ по правилу дифференцирования произведения.

Если $t = 0, \frac{dy}{dt} = 3$, то $3 = (0 + B)\frac{4}{3}e^0 + Ae^0$, т. е.

$$3 = \frac{4}{3}B + A,$$

откуда $A = -1$, поскольку $B = 3$.

Следовательно, частное решение есть

$$y = (-t + 3)e^{\frac{3}{4}t}, \text{ или } y = (3 - t)e^{\frac{3}{4}t}.$$

Пример. Решить $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ с условием, что при $x = 0, y = 3$ и $\frac{dy}{dx} = 7$.

Шаг 1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ в операторной форме есть $(D^2 + 6D + 13)y = 0$, где $D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение $m^2 + 6m + 13 = 0$.

Используем формулу корней квадратного уравнения:

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{[(6)^2 - 4(1)(13)]}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-16)}}{2}.$$

$$m = \frac{-6 \pm j4}{2} = -3 \pm j2.$$

Шаг 3. Корни комплексные; значит, **общее решение есть**

$$y = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Шаг 4. При $x = 0$, $y = 3$; значит, $3 = e^0(A \cos 0 + B \sin 0)$, т. е. $A = 3$. Поскольку $y = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$, то по правилу дифференцирования произведения

$$\frac{dy}{dx} = e^{-3x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - 3e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x) =$$

$$= e^{-3x}[(2B - 3A)\cos 2x - (2A + 3B)\sin 2x].$$

При $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 7$; значит, $7 = e^0[(2B - 3A)\cos 0 - (2A + 3B)\sin 0]$, т. е. $7 = 2B - 3A$, откуда $B = 8$, поскольку $A = 3$.

Значит, частное решение есть $y = e^{-3x}(3 \cos 2x + 8 \sin 2x)$.

11.5. НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

11.5.1. Общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения

В дифференциальном уравнении

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \tag{1}$$

делаем подстановку $y = u + v$ и получаем

$$a\frac{d^2(u+v)}{dx^2} + b\frac{d(u+v)}{dx} + c(u+v) = f(x).$$

Совершаем перестановку:

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu\right) + \left(a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv\right) = f(x).$$

Если положить

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv = f(x), \tag{2}$$

то

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0. \tag{3}$$

Общее решение u уравнения (3) будет содержать две неизвестные константы, необходимые для получения общего решения уравнения (1). Методика решения уравнения (3) приведена в разд. 11.4. Функция u называется *общим решением однородного уравнения* (ОРОУ).

Если можно найти частное решение v уравнения (2) без неизвестных констант, то $y = u + v$ даст общее решение уравнения (1). Функция v называется *частным решением неоднородного уравнения* (ЧРНУ). Следовательно, общее решение уравнения (1) дается выражением

$$y = \text{ОРОУ} + \text{ЧРНУ}.$$

11.5.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $a(d^2y/dx^2) + b(dy/dx) + cy = f(x)$

Шаг 1. Записываем заданное дифференциальное уравнение в виде $(aD^2 + bD + c)y = f(x)$.

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение $am^2 + bm + c = 0$ для m.

Шаг 3. Находим общее решение однородного уравнения u тем же способом, что в разд. 11.4.

Шаг 4. Чтобы найти частное решение v, сначала рассмотрим частное решение, обусловленное функцией $f(x)$, но содержащее неопределенные коэффициенты. **В Табл. 11.1** приведены некоторые подстановки для различных функций $f(x)$.

Шаг 5. Подставляем предполагаемое частное решение в дифференциальное уравнение $(aD^2 + bD + c)v = f(x)$ и приравниваем соответствующие коэффициенты для нахождения констант.

Шаг 6. Общее решение определяется как y = ОРОУ + ЧРНУ, т. е. $y = u + v$.

Шаг 7. Если заданы граничные условия, можно найти произвольные константы и частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 11\dfrac{dy}{dx} + 12y = 3x - 2$.

Шаг 1. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 11\dfrac{dy}{dx} + 12y = 3x - 2$ в операторной форме имеет вид

$$(2D^2 - 11D + 12) = 3x - 2.$$

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение: $2m^2 - 11m + 12 = 0$.

Разлагаем на множители: $(2m - 3)(m - 4) = 0$, откуда $m = \dfrac{3}{2}$ или $m = 4$.

Шаг 3. Поскольку корни действительные и различные, то общее решение $u = Ae^{\frac{2}{3}x} + Be^{4x}$.

Шаг 4. Поскольку $f(x) = 3x - 2$ — это многочлен, пусть частное решение имеет вид $v = ax + b$ (**Табл. 11.1б**).

Таблица 11.1. *Формы частных решений для различных функций*

п/п	Тип	Простые случаи	Сложные случаи
		Частное решение	
а	$f(x)$ = константа	$v = k$	$v = kx$ (используется, если ОРОУ содержит константу)
б	$f(x)$ = многочлен (т. е. $f(x) = L + Mx + Nx^2 + \dots$, где любой коэффициент может быть равен нулю)	$v = a + bx + cx^2 + \dots$	
в	$f(x)$ = экспоненциальная функция (т. е. $f(x) = Ae^{ax}$)	$v = ke^{ax}$	1. $v = kxe^{ax}$ (используется, если ОРОУ содержит e^{ax}) 2. $v = kx^2e^{ax}$ (используется, если ОРОУ содержит **и** e^{ax}, **и** xe^{ax}) и т. д.
г	$f(x)$ = функция синуса или косинуса (т. е. $f(x) = a\sin px + b\cos px$, где a или b может равняться нулю)	$v = A\sin px + B\cos px$	$v = x(A\sin px + B\cos px)$ (используется, если ОРОУ содержит $\sin px$ и/или $\cos px$)
д	$f(x)$ = сумма, например: $f(x) = 4x^2 - 3\sin 2x$; $f(x) = 2 - x + e^{3x}$	1. $v = ax^2 + bx + c + d\sin 2x + e\cos 2x$. 2. $v = ax + b + ce^{3x}$	
е	$f(x)$ = произведение, например: $f(x) = 2e^x\cos 2x$	$v = e^x(A\sin 2x + B\cos 2x)$	

Шаг 5. Подставляем $v = ax + b$ в $(2D^2 - 11D + 12)v = 3x - 2$, в результате получаем:

$$(2D^2 - 11D + 12)(ax + b) = 3x - 2,$$

$$2D^2(ax + b) - 11\mathrm{D}(ax + b) + 12(ax + b) = 3x - 2,$$

$$0 - 11a + 12ax + 12b = 3x - 2.$$

Приравниваем коэффициенты при x, получаем: $12a = 3$, откуда $a = \frac{1}{4}$.

Приравниваем постоянные члены: $-11a + 12b = -2$, т. е.

$$-11\left(\frac{1}{4}\right) + 12b = -2,$$

откуда $12b = -2 + \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$, т. е. $b = \frac{1}{16}$.

Следовательно, частное решение $v = ax + b = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$.

Шаг 6. Общее решение имеет вид $y = u + v$, т. е.

$$y = Ae^{\frac{3}{2}x} + Be^{4x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}.$$

Пример. Решить $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 3e^{4x}$ при условии, что при $x = 0$, $y = -\frac{2}{3}$ и $\frac{dy}{dx} = 4\frac{1}{3}$.

Шаг 1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 3e^{4x}$ в операторной форме имеет вид

$$(D^2 - 2D + 1)y = 3e^{4x}.$$

Шаг 2. Подставляем m вместо D и получаем вспомогательное уравнение $m^2 - 2m + 1 = 0$.

Разлагаем на множители: $(m - 1)(m - 1) = 0$, откуда $m = 1$.

Шаг 3. Поскольку корни действительные и равные, общее решение однородного уравнения $u = (Ax + B)e^x$.

Шаг 4. Пусть частное решение $v = ke^{4x}$ (см. **Табл. 11.1в**).

Шаг 5. Подставляем $v = ke^{4x}$ в $(D^2 - 2D + 1)v = 3e^{4x}$, в результате получаем

$$(D^2 - 2D + 1)ke^{4x} = 3e^{4x},$$
$$D^2(ke^{4x}) - 2D(ke^{4x}) + 1(ke^{4x}) = 3e^{4x},$$
$$16ke^{4x} - 8ke^{4x} + ke^{4x} = 3ke^{4x}.$$

Следовательно, $9ke^{4x} = 3ke^{4x}$, откуда $k = \frac{1}{3}$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения

$$v = ke^{4x} = \frac{1}{3}e^{4x}.$$

Шаг 6. Общее решение имеет вид $y = u + v$. То есть

$$y = (Ax + B)e^x + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

При $x = 0, y = -\frac{2}{3}$; значит $-\frac{2}{3} = (0 + B)e^0 + \frac{1}{3}e^0$, откуда $B = -1$.

$$\frac{dy}{dx} = (Ax + B)e^x + e^x(A) + \frac{4}{3}e^{4x}.$$

При $x = 0, \frac{dy}{dx} = 4\frac{1}{3}$; значит $\frac{13}{3} = B + A + \frac{4}{3}$, откуда $A = 4$,

поскольку $B = -1$.

Следовательно, частное решение $y = (4x - 1)e^x + \frac{1}{3}e^{4x}$.

Пример. Решить $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 6\sin 2x$.

Шаг 1. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 6\sin 2x$ в операторной форме имеет вид

$$(2D^2 + 3D - 5)y = 6\sin 2x.$$

Шаг 2. Вспомогательное уравнение есть $2m^2 + 3m - 5 = 0$, откуда

$$(m - 1)(2m + 5) = 0, \text{ т. е. } m = 1 \text{ или } m = -\frac{5}{2}.$$

Шаг 3. Поскольку корни действительные и различные, то общее решение однородного уравнения $\boldsymbol{u = Ae^x + Be^{-\frac{5}{2}x}}$.

Шаг 4. Пусть частное решение $v = A\sin 2x + B\cos 2x$ (см. **Табл. 11.1г**).

Шаг 5. Подставляем $v = A\sin 2x + B\cos 2x$ в $(2D^2 + 3D - 5)y = 6\sin 2x$, в итоге получаем

$$(2D^2 + 3D - 5)(A\sin 2x + B\cos 2x) = 6\sin 2x,$$
$$D(A\sin 2x + B\cos 2x) = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,$$
$$D^2(A\sin 2x + B\cos 2x) = D(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) =$$
$$= -4A\sin 2x - 2B\cos 2x.$$

Следовательно, $(2D^2 + 3D - 5)(A\sin 2x + B\cos 2x) = -8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 6A\cos 2x - 6B\sin 2x - 5A\sin 2x - 5B\cos 2x = 6\sin 2x$.

Приравниваем коэффициенты при $\sin 2x$:

$$-13A - 6B = 0. \qquad (1)$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 2x$:

$$6A - 13B = 0. \qquad (2)$$

Умножаем на 6 выражение (1), получаем

$$-78A - 36B = 36. \qquad (3)$$

Умножаем на 13 выражение (2), получаем

$$78A - 169B = 0. \qquad (4)$$

Складываем выражения (3) и (4), получаем $-205B = 36$, откуда

$$B = \frac{-36}{205}.$$

Подставляем $B = \frac{-36}{205}$ в уравнение (1) или (2) и получаем $A = \frac{-78}{205}$.

Следовательно, ЧРНУ $v = \frac{-78}{205}\sin 2x - \frac{36}{205}\cos 2x$.

Шаг 6. Общее решение имеет вид $y = u + v$, т. е.

$$y = Ae^{x} + Be^{-\frac{5}{2}x} - \frac{2}{205}(39\sin 2x + 18\cos 2x).$$

11.6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

11.6.1. Введение

Не все дифференциальные уравнения первого порядка могут быть решены с помощью методов, описанных в разд. 11.1 ... 11.3. Есть и другие аналитические методы решения дифференциальных уравнений, но уравнений, которые могут быть решены подобными методами, весьма мало.

Если задано дифференциальное уравнение и известны граничные условия, то с помощью *численных методов* можно получить приблизительное решение. Существует ряд таких численных методов, простейший из них называется *метод Эйлера*.

11.6.2. Метод Эйлера

Согласно разд. 1.17, ряд Маклорена имеет вид

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots .$$

Следовательно, в некоторой точке $f(h)$ на **Рис. 11.4**

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \dots .$$

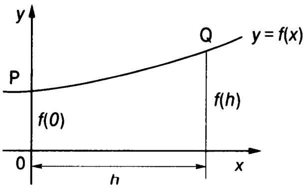


Рис. 11.4

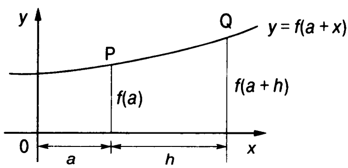


Рис. 11.5

Если ось y и начало координат перенести на a единиц влево, как показано на **Рис. 11.5**, то уравнение данной кривой в новой системе координат принимает вид $y = f(a + x)$, а значение функции в точке P равно $f(a)$.

В точке Q на **Рис. 11.5**

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots . \qquad (1)$$

Это выражение называется *рядом Тейлора*.

Если h — интервал между двумя ординатами y_0 и y_1, как показано на **Рис. 11.6**, и если $f(a) = y_0$ и $y_1 = f(a + h)$, то, согласно методу Эйлера, $f(a + h) = f(a) + hf'(a)$, т. е.

$$y_1 = y_0 + h(y')_0. \qquad (2)$$

Используемая в методе Эйлера аппроксимация — это рассмотрение только первых двух членов ряда Тейлора, представленного в уравнении (1).

Следовательно, если известны y_0, $h\,(y')_0$, то можно вычислить величину y_1, которая является приблизительным значением функции в точке Q на **Рис. 11.6**.

Пример. Найти численное решение дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = 3(1 + x) - y$ с начальными условиями $x = 1$ при $y = 4$ в диапазоне от $x = 1.0$ до $x = 2.0$ с интервалами 0.2.

При $x_0 = 1$ и $y_0 = 4$ имеем $(y')_0 = 3(1 + 1) - 4 = \mathbf{2}$.

По методу Эйлера, $y_1 = y_0 + h(y')_0$ из уравнения (2).

Следовательно, $y_1 = 4 + (0.2)(2) = \mathbf{4.4}$, поскольку $h = 0.2$.

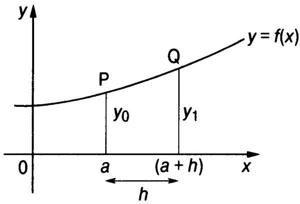


Рис. 11.6

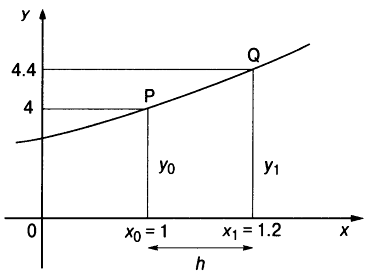


Рис. 11.7

В точке Q на **Рис. 11.7** $x_1 = 1.2$, $y_1 = 4.4$ и $(y')_1 = 3(1 + x_1) - y_1$,

т. е.

$$(y')_1 = 3(1 + 1.2) - 4.4 = \mathbf{2.2}.$$

Взяв найденные для точки Q значения x, y и y' в качестве новых начальных значений для x_0, y_0 $(y')_0$, описанный выше процесс можно повторить и найти значения для точки R, показанной на **Рис. 11.8**.

Тогда в точке R из уравнения (2)

$$y_1 = y_0 + h(y')_0 = 4.4 + (0.2)(2.2) = \mathbf{4.84}.$$

При $x_1 = 1.4$, $y_1 = 4.84$ имеем $(y')_1 = 3(1 + 1.4) - 4.84 = \mathbf{2.36}$.

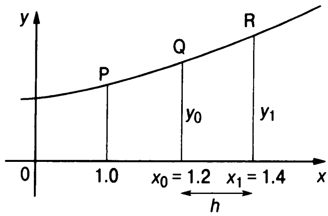


Рис. 11.8

Таким образом, можно шаг за шагом применять метод Эйлера, и проще всего привести результаты вычислений в таблице, как показано в **Табл. 11.2**. Расчеты для строк 1...3 были приведены выше.

Для строки 4, где $x_0 = 1.6$:

$$y_1 = y_0 + h(y')_0 = 4.84 + (0.2)(2.36) = \mathbf{5.312};$$
$$(y')_0 = 3(1 + 1.6) - 5.312 = \mathbf{2.488}.$$

Для строки 5, где $x_0 = 1.8$:

$$y_1 = y_0 + h(y')_0 = 5.312 + (0.2)(2.488) = \mathbf{5.8096};$$
$$(y')_0 = 3(1 + 1.8) - 5.8096 = \mathbf{2.5904}.$$

Для строки 6, где $x_0 = 2.0$:

$$y_1 = y_0 + h(y')_0 = 5.8096 + (0.2)(2.5904) = \mathbf{6.32768}.$$

Таблица 11.2

п/п	x_0	y_0	$(y')_0$
1	1	4	2
2	1.2	4.4	2.2
3	1.4	4.84	2.36
4	1.6	5.312	2.488
5	1.8	5.8096	2.5904
6	2.0	6.32768	

(Поскольку рассматривается интервал от 1.0 до 2.0, нет необходимости вычислять $(y')_0$ для строки 6.) Частное решение определяется значением величины y как функции x.

График решения $\frac{dy}{dx} = 3(1 + x) - y$ с начальными условиями $x = 1, y = 4$ показан на **Рис. 11.9**.

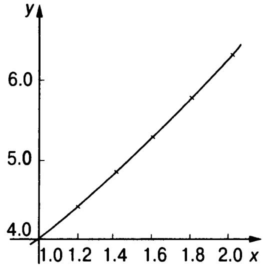


Рис. 11.9

На практике лучше всего наносить точки на график после каждого вычисления, чтобы проверить правильность вычислений и исключить появление ошибок в процессе вычисления.

11.6.3. Усовершенствованный метод Эйлера

В рассмотренном выше методе Эйлера для получения величины y_1 в точке Q используется угол наклона кривой $(y')_0$ в точке $P_{(x_0, y_0)}$ на **Рис. 11.10** на интервале h. QR на **Рис. 11.10** — это итоговая погрешность.

В усовершенствованном методе Эйлера, называемом *методом Эйлера — Коши,* используется угол наклона $P_{(x_0, y_0)}$ на половине интервала, затем этот отрезок продолжается прямой, наклон которой аппроксимирует наклон кривой в x_1, как показано на **Рис. 11.11**. Пусть y_{P_1} — прогнозируемое по методу Эйлера значение в точке R, т. е. длина RZ, где

$$y_{P_1} = y_0 + h(y')_0\,. \qquad (3)$$

Погрешность, обозначенная QT на **Рис. 11.11**, теперь меньше, чем погрешность QR в базовом методе Эйлера, поэтому полученный результат имеет более высокую точность.

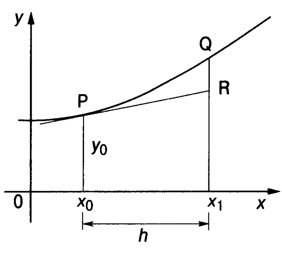


Рис. 11.10

Рис. 11.11

Исправленное значение y_{C_1} в усовершенствованном методе Эйлера определяется как

$$y_{C_1} = y_0 + \frac{1}{2}h[(y')_0 + f(x_1, y_{P_1})]. \qquad (4)$$

Пример. С помощью метода Эйлера — Коши решить дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dy} = y - x$ в диапазоне 0(0.1)0.5, с начальными условиями $x = 0$, $y = 2$. Запишем

$$\frac{dy}{dx} = y' = y - x.$$

Поскольку начальные условия суть: $x_0 = 0$ и $y_0 = 2$, то $(y')_0 = 2 - 0 = 2$.
Интервал $h = 0.1$, следовательно, $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$.
Из уравнения (3): $y_{P_1} = y_0 + h(y')_0 = 2 + (0.1)(2) = 2.2$.

Из уравнения (4): $y_{C_1} = y_0 + \frac{1}{2}h[(y')_0 + f(x_1, y_{P_1})] =$

$$= y_0 + \frac{1}{2}h[(y')_0 + (y_{P_1} - x_1)] = 2 + \frac{1}{2}(0.1)[2 + (2.2 - 0.1)] = \mathbf{2.205},$$

$$y'(1) = y_{C_1} - x_1 = 2.205 - 0.1 = 2.105.$$

Как и в методе Эйлера, составим таблицу значений, строки 1 и 2 **Табл. 11.3** мы уже определили ранее.

Таблица 11.3

п/п	x_0	y_0	$(y')_0$
1	0	2	2
2	0.1	2.205	2.105
3	0.2	2.421025	2.221025
4	0.3	2.649232625	2.349232625
5	0.4	2.89090205	2.49090205
6	0.5	3.147446765	

Результаты в строке 2 теперь принимаем за x_0, y_0 и $(y')_0$ для следующего интервала, и процесс повторяется.

Для строки 3, $x_1 = 0.2$:

$$y_{P_1} = y_0 + h(y')_0 = 2.205 + (0.1)(2.105) = 2.4155,$$

$$y_{C_1} = y_0 + \frac{1}{2}h[(y')_0 + f(x_1, y_{P_1})] =$$

$$= 2.205 + \frac{1}{2}(0.1)[2.105 + (2.4155 - 0.2)] = \mathbf{2.421025}\,,$$

$$(y')_0 = y_{C_1} - x_1 = 2.421025 - 0.2 = 2.221025$$

и так далее.

Уравнение $\frac{dy}{dx} = y - x$ можно решить аналитически методом интегрирующего множителя из разд. 11.3 и найти решение: $y = x + 1 + e^x$. Подставляем значения $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots$ и получаем точные значения, приведенные в **Табл. 11.4**. В таблице также приведены результаты, полученные методом Эйлера.

Таблица 11.4

п/п	x	Значение y по методу Эйлера	Значение y по методу Эйлера — Коши	Точное значение $y = x + 1 + e^x$
1	0	2	2	2
2	0.1	2.2	2.205	2.205170918
3	0.2	2.41	2.421025	2.421402758
4	0.3	2.631	2.649232625	2.649858808
5	0.4	2.8641	2.89090205	2.891824698
6	0.5	3.11051	3.147446765	3.148721271

Таблица 11.5

x	Погрешность метода Эйлера	Погрешность метода Эйлера — Коши
0	0	0
0.1	0.234%	0.00775%
0.2	0.472%	0.0156%
0.3	0.712%	0.0236%
0.4	0.959%	0.0319%
0.5	1.214%	0.0405%

Процентная погрешность для обоих методов для каждого значения x приведена в **Табл. 11.5**. Например, при $x = 3$:

$$\%\text{-ная погрешность метода Эйлера} = \left(\frac{\text{действительная} - \text{вычисленная}}{\text{действительная}}\right) \times 100\% =$$

$$= \left(\frac{2.649858808 - 2.631}{2.649858808}\right) \times 100\% = \mathbf{0.712\%}.$$

%-ная погрешность метода Эйлера — Коши равна

$$\left(\frac{2.649858808 - 2.649232625}{2.649858808}\right) \times 100\% = \mathbf{0.0236\%}.$$

Это вычисление и другие, приведенные в **Табл. 11.5**, показывают, что метод Эйлера — Коши точнее метода Эйлера.

Глава 12

Статистика и теория вероятностей

12.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

12.1.1. Некоторые статистические термины

Информацию можно в основном получить двумя способами:

- подсчетом, например, числа проданных почтовым отделением марок за некий период;
- измерением, например, роста некой группы людей.

Если данные получены путем подсчета и выражены только целыми числами, то они называются *дискретными*. Измеренные данные могут принимать любые значения в определенных пределах и называются *непрерывными*.

Множество — это группа данных, а отдельное значение из множества называется *элементом набора*. Так, если измеренные с точностью до 0.1 килограмма массы пяти людей составили 53.1 кг, 59.4 кг, 62.1 кг, 77.8 кг и 64.4 кг, тогда множество данных по массе пяти людей в килограммах — это

$$\{53.1, 59.4, 62.1, 77.8, 64.4\}$$

и один из элементов множества — 59.4.

Множество, содержащее все элементы, называется *совокупностью*. Некоторые элементы, случайным образом взятые из совокупности, называются *выборкой*. Таким образом, все регистрационные номера автомобилей составляют совокупность, но регистрационные номера, скажем, 20 машин, случайным образом выбранных по стране, образуют выборку из этой совокупности.

Число раз, которое элемент появляется в множестве, называется *частотой* этого элемента. Таким образом, в множестве {2, 3, 4, 5, 4, 2, 4, 7, 9} элемент 4 имеет частоту три, элемент 2 — частоту 2, другие элементы — частоту 1.

Относительная частота, с которой встречается в множестве каждый элемент, определяется отношением

$$\frac{\text{частота элемента}}{\text{общая частота всех элементов}}.$$

Для множества {2, 3, 5, 4, 7, 5, 6, 2, 8} относительная частота элемента 5 равна $\frac{2}{9}$. Часто относительная частота выражается в процентах, *процентная относительная частота* = (относительная частота × 100)%.

12.1.2. Представление несгруппированных данных

Несгруппированные данные могут быть представлены несколькими способами, это:

- *пиктограммы,* где для представления величин используются графические символы;
- *горизонтальные столбчатые диаграммы,* где данные представлены равноотстающими друг от друга горизонтальными прямоугольниками;
- *вертикальные столбчатые диаграммы,* где данные представлены равноотстающими вертикальными прямоугольниками.

Рис. 12.1

Пример. Количество починенных за полгода техником в мастерской телевизоров помесячно приведено в таблице.

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Количество починок	11	6	15	9	13	8

Эти данные могут быть представлены в виде пиктограмм, как показано на **Рис. 12.1**, где каждый символ представляет два починенных телевизора. Таким образом, $5\frac{1}{2}$ символа использовано для представления 11 телевизоров, починенных в январе, 3 символа использовано для представления 6 починенных телевизоров и так далее.

Пример. Общая протяженность поездок за неделю, предпринятых 4 коммивояжерами, в милях приводится ниже:

Коммивояжер	*P*	*Q*	*R*	*S*
Длина маршрутов [мили]	413	264	597	143

Чтобы представить данные в виде горизонтальной столбчатой диаграммы, используются равноотстоящие друг от друга горизонтальные прямоугольники любой ширины, длина которых пропорциональна пройденному расстоянию. Таким образом, длина прямоугольника для коммивояжера *P* пропорциональна 413 милям, и так далее. Горизонтальная столбчатая диаграмма, описывающая приведенные данные, представлена на **Рис. 12.2**.

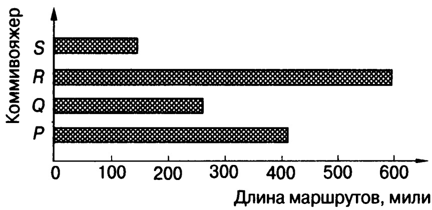


Рис. 12.2

Пример. Число партий инструментов или материалов, отгруженных со склада фабрики, наблюдалось 7 часов в день с периодом 1 час, и результаты исследования таковы:

Период	1	2	3	4	5	6	7
Число партий	34	17	9	5	27	13	6

В вертикальной столбчатой диаграмме используются равноотстоящие друг от друга вертикальные прямоугольники, высота которых пропорциональна представляемой величине. Таким образом, высота прямоугольника для периода 1 пропорциональна 34 единицам, и так далее. Вертикальная столбчатая диаграмма, представляющая приведенные данные, показана на **Рис. 12.3**.

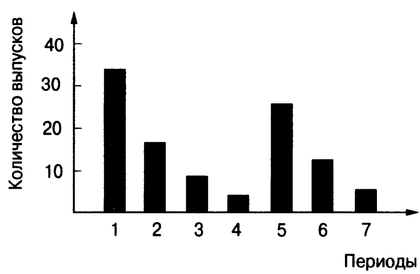


Рис. 12.3

12.1.3. Процентная диаграмма

Тенденции в несгруппированных данных за равные периоды могут быть представлены в виде *процентной столбчатой диаграммы*. В подобной диаграмме используются равноотстоящие прямоугольники любой ширины, высота которых соответствует 100%. Затем прямоугольники разбиваются на отрезки, соответствующие относительным частотам элементов.

Пример. Число различных типов домов, проданных компанией ежегодно за трехгодичный период, представлено ниже.

Тип зданий	Первый год	Второй год	Третий год
4-комнатные бунгало	24	17	7
5-комнатные бунгало	38	71	118
4-комнатные дома	44	50	53
5-комнатные дома	64	82	147
6-комнатные дома	30	30	25

Чтобы нарисовать процентную столбчатую диаграмму для представления данных, сначала необходимо составить таблицу значений относительных частот в процентах с точностью до процента. Поскольку относительная частота в процентах есть $\dfrac{\text{частота элемента} \times 100}{\text{общая частота}}$, значит, для 4-комнатных бунгало за первый год относительная частота в процентах равна $\dfrac{24 \times 100}{24 + 38 + 44 + 64 + 30} = 12\%$.

Относительные частоты в процентах для других типов зданий для каждого года из трех лет вычисляются аналогично, и результаты расчетов представлены в таблице ниже.

Тип зданий	Первый год	Второй год	Третий год
4-комнатные бунгало	12%	7%	2%
5-комнатные бунгало	19%	28%	34%
4-комнатные дома	22%	20%	15%
5-комнатные дома	32%	33%	42%
6-комнатные дома	15%	12%	7%

Процентную столбчатую диаграмму рисуем в виде трех равноотстоящих прямоугольников произвольной ширины, соответствующих трем годам. Высоты прямоугольников соответствуют 100% относительной частоты, и они разбиты на составляющие части согласно значениям из приведенной выше таблицы. Для обозначения соответствующих значений процентов из строк таблицы использована специальная схема (различная штриховка или цвета). Процентная столбчатая диаграмма приведена на **Рис. 12.4**.

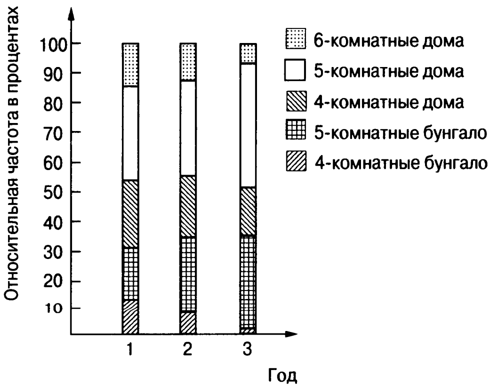


Рис. 12.4

Секторная диаграмма используется для представления составляющих целое частей. В секторной диаграмме площадь круга представляет собой целое, а площади секторов круга пропорциональны составляющим целое частям.

Пример. Розничная цена продукта 2 £ складывается из следующих частей: материалы — 10 пенсов, работа — 20 пенсов, исследования и разработка — 40 пенсов, накладные расходы — 70 пенсов, прибыль — 60 пенсов. Составить секторную диаграмму.

Чтобы представить эту информацию в виде секторной диаграммы, рисуем круг любого радиуса, и площадь этого круга представляет собой целое, в данном случае это 2 £. Круг делится на сектора таким образом, чтобы площади секторов были пропорциональны частям, т. е. это те части, которые составляют общую розничную цену. Чтобы площадь сектора была пропорциональна некоторой части, данной части должен быть пропорционален угол этого сектора. В целом 2 £ — это 200 пенсов — соответствуют 360°.

Следовательно, 10 пенсов соответствуют $360 \times \frac{10}{200}$ градусам, т. е. 18°, 20 пенсов соответствуют $360 \times \frac{20}{200}$ градусам, т. е. 36°, и так далее; в итоге получаем углы секторов для составляющих розничной цены: 18°, 36°, 72°, 126° и 108° соответственно (см. **Рис. 12.5**).

Рис. 12.5

12.1.4. Представление группированных данных

Если число элементов множества мало, скажем, десять значений величин или меньше, данные можно представить без дальнейшего анализа в виде пиктограмм, гистограмм или секторных диаграмм.

Для множеств, содержащих более десяти элементов, имеющие одинаковые значения элементы группируются в *классы* для получения *частотного распределения*. Для точного подсчета числа элементов в различных классах используется *счетная диаграмма*. Частотное распределение — это таблица, представляющая классы и соответствующие им частоты.

Новое множество данных, полученное при формировании частотного распределения, называется *группированными данными*.

Термины, используемые для описания группированных данных, приведены на **Рис. 12.6а**. Размер или диапазон класса равен *верхнему граничному значению класса* минус нижнее *граничное значение класса*, и на **Рис. 12.6** это 7.65 – 7.35, т. е. 0.30. Интервал группирования для класса на **Рис. 12.6б** — от 7.4 до 7.6, и срединная точка интервала определяется следующим образом:

$$\frac{\text{верхнее граничное значение} + \text{нижнее граничное значение}}{2}$$

Для **Рис. 12.6** это $\dfrac{7.65 + 7.35}{2}$, т. е. 7.5.

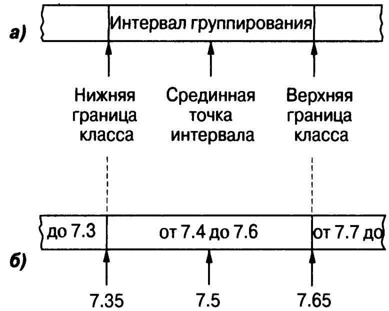


Рис. 12.6

Один из основных способов представления группированных данных в виде диаграммы — использование *гистограммы*, на которой ***площади*** вертикальных прямоугольников пропорциональны частотам классов. Если интервалы группирования равны, высоты прямоугольников гистограммы равны частотам классов. Следовательно, если интервал группирования класса *A* в 2 раза больше интервала группирования класса *B*, то для равных частот высота прямоугольника *A* в 2 раза меньше прямоугольника *B*.

Другой метод представления группированных данных в виде гистограммы — использование *многоугольника частот,* который представляет собой график с нанесенными на него точками зависимости частоты от значений срединной точки интервала, соединенными прямыми линиями.

Распределение накопленных частот — это таблица, в которой приведены значения накопленных частот для каждого значения верхней границы интервала. Накопленная частота для определенного значения верхней границы интервала определяется при добавлении частоты попадания в класс к сумме предыдущих частот.

Кривая, полученная при соединении координат накопленных частот (по вертикали) в зависимости от верхних границ интервала (по горизонтали), называется *огива* или *кривая распределения накопленных частот*.

Пример. Массы 50 болванок в килограммах измерены с точностью до 0.1 кг, и результаты измерений приведены в таблице:

8.0	8.6	8.2	7.5	8.0	9.1	8.5	7.6	8.2	7.8
8.3	7.1	8.1	8.3	8.7	7.8	8.7	8.5	8.4	8.5
7.7	8.4	7.9	8.8	7.2	8.1	7.8	8.2	7.7	7.5
8.1	7.4	8.8	8.0	8.4	8.5	8.1	7.3	9.0	8.6
7.4	8.2	8.4	7.7	8.3	8.2	7.9	8.5	7.9	8.0

Диапазон данных — это элемент с максимальным значением минус элемент с минимальным значением. Исследуем множество данных и получаем, что в данном случае диапазон равен $9.1 - 7.1 = 2.0$.

Приблизительный размер каждого класса может быть найден как $\dfrac{\text{диапазон}}{\text{количество классов}}$.

Если требуется рассмотреть семь классов, тогда размер каждого класса равен 2.0/7, т. е. приблизительно 0.3, таким образом, выбираем границы интервалов от 7.1 до 7.3, от 7.4 до 7.6, от 7.7 до 7.9 и так далее.

Чтобы точно получить значения в каждой группе, составляем *счетную диаграмму*, как показано в **Табл. 12.1**. Для этого в левой части таблицы перечисляем группы, а затем исследуем все 50 членов набора данных и распределяем их по соответствующим группам, ставя «1» в соответствующей строке. Для простоты итоговых подсчетов каждая пятая единица в ряду заменяется косой линией.

Таблица 12.1

Класс	Группа
От 7.1 до 7.3	111
От 7.4 до 7.6	~~1111~~
От 7.7 до 7.9	~~1111~~ 1111
От 8.0 до 8.2	~~1111~~ ~~1111~~ 1111
От 8.3 до 8.5	~~1111~~ ~~1111~~ 1
От 8.6 до 8.8	~~1111~~ 1
От 8.9 до 9.1	11

Таблица 12.2

Интервал	Срединная точка интервала	Частота
От 7.1 до 7.3	7.2	3
От 7.4 до 7.6	7.5	5
От 7.7 до 7.9	7.8	9
От 8.0 до 8.2	8.1	14
От 8.3 до 8.5	8.4	11
От 8.6 до 8.8	8.7	6
От 8.9 до 9.1	9.0	2

Частотное распределение данных показано в **Табл. 12.2**, там приведены классы и соответствующие им частоты. В таблице также указаны срединные точки интервалов, поскольку они используются при построении многоугольника частот и гистограммы.

Многоугольник частот показан на **Рис. 12.7**, а соответствующие срединным точкам интервалов/частотам координаты приведены в **Табл. 12.2**. При построении эти координаты соединяются прямыми линиями, и многоугольник «привязан» на концах соединением обоих концевых точек с серединой предыдущего или следующего интервала, которым приписывается нулевая частота.

Гистограмма показана на **Рис. 12.8**, ширина прямоугольника соответствует (значению верхней границы класса – значение нижней границы класса), а высота прямоугольника соответствует частоте класса. Самый простой способ построить гистограмму — отметить по горизонтальной оси срединные точки и относительно соответствующих срединных точек симметрично построить прямоугольники с соприкасающимися боками.

Распределение накопленных частот — это таблица, в которой приведены значения накопленных частот для значений верхних границ классов, как в **Табл. 12.3**. В первом и втором столбцах указаны классы и их частоты. В третьем столбце приведены значения верхних границ классов из столбца 1. В четвертом столбце приведены величины накопленных частот для всех частот ниже верхнего граничного значения класса из третьего столбца. Таким образом, например, для класса от 7.7 до 7.9 из третьей строки накопленная частота равна сумме всех частот со значениями меньше 7.95, т. е. $3 + 5 + 9 = 17$ и так далее.

Огива для распределения накопленных частот приведена на **Рис. 12.9**. Координаты соответствующих верхних границ класса/накопленных частот соединены прямыми линиями (это не самая лучшая гладкая кривая, построенная по точкам, как при обработке экспериментальных данных). Начало огивы «привязано» за счет добавления координаты (7.05, 0).

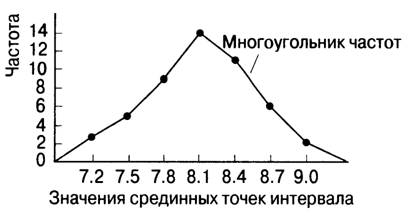


Рис. 12.7

Рис. 12.8

Таблица 12.3

Интервал	Частота	Верхняя граница класса	Накопленная частота
7.1...7.3	3	7.35	3
7.4...7.6	5	7.65	8
7.7...7.9	9	7.95	17
8.0...8.2	14	8.25	31
8.3...8.5	11	8.55	42
8.6...8.8	6	8.85	48
8.9...9.1	2	9.15	50

Рис. 12.9

12.2. МЕРЫ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ

12.2.1. Меры центральной частоты

Для представления набора данных может быть использовано единственное значение, которое показывает общие величины членов набора, для обозначения этого единственного значения часто используется слово «*средний*».

Статистический термин для обозначения средней величины — это среднее арифметическое или просто *среднее*. Могут использоваться другие меры, такие как *медиана* (*срединное значение*) и *наивероятнейшее значение*.

12.2.2. Среднее, медиана и мода для дискретных данных

Среднее

Средняя арифметическая величина определяется как сумма всех элементов множества, деленная на количество элементов в множестве. Таким образом, среднее множества чисел {4, 5, 6, 9} — это

$$\frac{4+5+6+9}{4}, \text{ т. е. } 6.$$

В общем, среднее значение множества данных

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \text{ можно записать в виде } \frac{\sum x}{n},$$

где Σ — греческая буква «сигма», означающая «сумма», а $\bar{x}$ используется для обозначения среднего значения.

Медиана

Срединное значение, или *медиана*, часто дает лучшее представление о преобладающем значении множества, содержащего крайние значения. Множество {7, 5, 74, 10} имеет среднее значение 24, которое на самом деле не представляет ни одно из значений элементов множества. Срединное значение (медиану) получают следующим образом:

- упорядочиваем элементы множества по порядку возрастания значений и
- выбираем значение *среднего элемента* для множеств с нечетным количеством элементов или находим среднее значение двух средних элементов для множества с четным количеством элементов.

Пример. Упорядочиваем множество {7, 5, 74, 10}, получаем {5, 7, 10, 74}, поскольку оно содержит четное количество элементов (в данном случае 4), находим среднее значение для 7 и 10, в итоге получаем срединное значение 8.5.

Пример. Упорядочиваем множество {3, 81, 15, 7, 14}, получаем {3, 7, 14, 15, 81}, и медиана (срединное значение) — это величина среднего элемента, т. е. 14.

Мода

Модальное значение, или *мода*, — это значение, наиболее часто встречающееся во множестве. Если два значения встречаются одинаковое количество раз, множество называется бимодальным.

Пример. Множество {5, 6, 8, 2, 5, 4, 6, 5, 3} имеет моду 5, поскольку элемент 5 встречается в нем 3 раза.

12.2.3. Среднее значение, медиана и мода для группированных данных

Среднее значение группированных данных — это сумма произведений (частота × срединная точка интервала), деленная на сумму частот. То есть среднее значение

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum(fx)}{\sum f},$$

где f — частота класса, имеющего срединное значение интервала x, и так далее.

Пример. Частотное распределение значений сопротивления в омах для 48 резисторов таково:

Диапазон [Ом]	20.5...20.9	21.0...21.4	21.5...21.9	22.0...22.4	22.5...22.9	23.0...23.4
Количество	3	10	11	13	9	2

Срединные точки интервалов/частоты следующие:

Срединная точка	20.7	21.2	21.7	22.2	22.7	23.2
Количество	3	10	11	13	9	2

Для группированных данных среднее определяется выражением $\bar{x} = \dfrac{\sum f(x)}{\sum f}$, где f — частота класса, а x — срединное значение интервала. Следовательно, среднее значение

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 20.7) + (10 \times 21.2) + (11 \times 21.7) + (13 \times 22.2) + (9 \times 22.7) + (2 \times 23.2)}{48} =$$

$$= \frac{1052.1}{48} = 21.919\ldots.$$

То есть **среднее значение равно 21.9 Ом** с точностью до 3 значащих цифр.

12.2.4. Гистограмма

Среднее, срединное и модальное значения для группированных данных могут быть найдены из *гистограммы.* В гистограмме значения частот откладываются по вертикали, а значения переменной — по горизонтали. Среднее значение определяется значением переменной, соответствующей вертикальной линии, проведенной через центр тяжести гистограммы. Медиану (срединное значение) получают, выбрав значение переменной таким образом, чтобы площадь гистограммы слева от вертикальной линии, проведенной через данное значение, равнялась площади гистограммы справа от этой линии. Модальное значение переменной получают делением ширины самого высокого прямоугольника гистограммы на высоты соседних прямоугольников.

Пример. Время в минутах, потраченное на сборку устройства, измерено 50 раз, и результаты измерений приведены ниже.

Диапазон [мин]	14...16	16...18	18...20	20...22	22...24	24...26
Количество	5	8	16	12	6	3

Среднее, срединное и модальное значения распределения могут быть найдены из гистограммы, описывающей данные.

Гистограмма показана на **Рис. 12.10**. Среднее значение лежит в центре тяжести гистограммы. По отношению к произвольной оси, скажем *YY*, взятой для времени 14 минут, положение горизонтальной координаты центра тяжести может быть получено

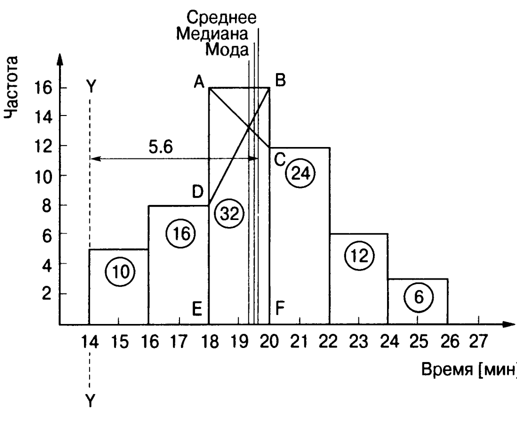


Рис. 12.10

по формуле $AM = \sum(am)$, где A — площадь гистограммы, M — расстояние от центра тяжести до оси YY, a — площадь прямоугольника гистограммы, m — расстояние от центра тяжести прямоугольника до YY. Площади отдельных прямоугольников показаны на гистограмме в кружках, откуда следует, что полная площадь гистограммы равна 100 квадратных единиц. Положение центров тяжести отдельных прямоугольников m — 1, 3, 5, ... единиц от YY. Таким образом,

$$100M = (10 \times 1) + (16 \times 3) + (32 \times 5) + (24 \times 7) + (12 \times 9) + (6 \times 11),$$

т. е. $M = \dfrac{560}{100} = 5.6$ единиц от YY.

Таким образом, положение **среднего** относительно оси времени: 14 + 5.6, т. е. **19.6 мин**.

Медиана (срединное значение) — это значение времени, соответствующее вертикальной линии, делящей площадь гистограммы на две равные части. Общая площадь равна 100 квадратных единиц, следовательно, вертикальная линия должна быть проведена таким образом, чтобы с каждой стороны от нее находилось по 50 единиц. Чтобы добиться этого, обратимся к **Рис. 12.10**: прямоугольник $ABFE$ должен быть разбит таким образом, чтобы 50 – (10 + 16) единиц площади лежало с одной стороны и 50 – (24 + 12 + 6) единиц площади — с другой стороны. Из рисунка видно, что площадь $ABFE$ разбита так, что 24 единицы площади лежат слева от линии и 8 единиц — справа, т. е. вертикальная линия должна проходить через 19.5 минут. Медиана (**срединное значение**) распределения — **19.5 мин**.

Модальное значение получают, разделив отрезок AB, который является высотой самого высокого прямоугольника, пропорционально высотам соседних прямоугольников. Из **Рис. 12.10**: соединяем AC и BD с последующим построением вертикальной линии через точку пересечения двух отрезков. Так мы получаем **моду** распределения, она равна **19.3 мин**.

12.2.5. Среднее квадратичное отклонение для дискретных данных

Среднее квадратичное отклонение множества данных дает представление о величине дисперсии или разброса элементов множества относительно среднего значения. Эта величина — среднее квадратичное значение элементов множества, и для дискретных данных она определяется следующим образом:

1. Находим меру центральной частоты; обычно это среднее значение, хотя иногда могут использоваться модальное и срединное значения.

2. Вычисляем отклонение каждого элемента множества от среднего значения, получаем

$$(x_1 - \overline{x}), (x_2 - \overline{x}), (x_3 - \overline{x}), \dots .$$

3. Находим квадраты отклонений, т. е.:

$$(x_1 - \overline{x})^2, (x_2 - \overline{x})^2, (x_3 - \overline{x})^2, \dots .$$

4. Находим сумму квадратов отклонений, это:

$$(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2, \dots .$$

5. Делим полученный результат на число элементов множества n, получаем

$$\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x})^2 + (x^3 - \bar{x})^2 + \dots}{n}.$$

6. Находим корень квадратный из (5).

Среднее квадратичное отклонение обозначается греческой буквой σ и математически определяется формулой

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}\right\}},$$

где x — элемент множества, x — среднее квадратичное значение множества и n — число элементов множества. Величина среднего квадратичного отклонения дает представление о расстоянии между элементами множества и его средним значением. Множество {1, 4, 7, 10, 13} имеет среднее значение 7, а среднее квадратичное отклонение — около 4.2. Множество {5, 6, 7, 8, 9} также имеет среднее значение 7, но среднее квадратичное отклонение равно примерно 1.4. Значит, элементы второго множества в большинстве намного ближе по величине к среднему значению, чем элементы первого множества.

Пример. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения для множества {5, 6, 8, 4, 10, 3} с точностью до 4 значащих цифр.

Арифметическое среднее $\overline{x} = \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{5+6+8+4+10+3}{6} = 6.$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}.$

Значения $(x - \overline{x})^2$: $(5-6)^2$, $(6-6)^2$, $(8-6)^2$, $(4-6)^2$, $(10-6)^2$ и $(3-6)^2$.

Сумма величин $(x - \bar{x})^2$, т. е. $\sum (x-\bar{x})^2 = 1 + 0 + 4 + 4 + 16 + {}$ $+ 9 = 34$ и $\dfrac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} = \dfrac{34}{6} \approx 5.7$, поскольку множество состоит из 6 элементов.

Следовательно, **среднее квадратичное отклонение**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{5.7} = \mathbf{2.387}$$ с точностью до 3 значащих цифр.

12.2.6. Среднее квадратичное отклонение для группированных данных

Для группированных данных среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\sum \{f(x-\bar{x})^2\}}{\sum f}\right\}},$$

где f — частота класса, x — срединная точка интервала, $\bar{x}$ — среднее значение группированных данных.

Пример. Дано следующее частотное распределение для значений сопротивления 48 резисторов в омах:

Диапазон [Ом]	20.5...20.9	21.0...21.4	21.5...21.9	22.0...22.4	22.5...22.9	23.0...23.4
Количество	3	10	11	14	9	2

Найти среднее квадратичное отклонение.

Из сказанного выше находим среднее значение распределения: $\bar{x} = 21.92$ с точностью до 4 значащих цифр.

Значения x — это срединные точки интервалов, т. е. 20.7, 21.2, 21.7, ...

Значит, значения $(x - \bar{x})^2$ суть

$$(20.7 - 21.92)^2, (21.2 - 21.92)^2, (21.7 - 21.92)^2, \ldots .$$

Значения $f(x - \bar{x})^2$:

$$3(20.7 - 21.92)^2, 10(21.2 - 21.92)^2, 11(21.7 - 21.92)^2, \ldots .$$

Значения $\sum f(x - \bar{x})^2$:

$$4.4652 + 5.1840 + 0.5324 + 1.0192 + 5.4756 + 3.2768 = 19.9532.$$

$$\frac{\sum \{f(x-\bar{x})^2\}}{\sum f} = \frac{19.9532}{48} \approx 0.41569\ldots .$$

и среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\sum\{f(x-\bar{x})^2\}}{\sum f}\right\}} = \sqrt{0.41569} \approx \mathbf{0.645}$$ с точностью до 3 значащих цифр.

12.2.7. Квартили, децили и перцентили

Иногда используются другие меры измерения дисперсии — это квартили, децили и перцентили. *Квартили* множества дискретных данных получают посредством выбора элементов, делящих множество на четыре равные части. Таким образом, множество {2, 3, 4, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 17} содержит 11 элементов и значения, делящие множество на четыре равные части, — это 4, 7 и 13. Эти значения обозначаются Q_1, Q_2, Q_3 и называются первый, второй и третий квартиль соответственно. Можно увидеть, что величина второго квартиля, Q_2 — это значение среднего элемента, следовательно, это медиана множества. Для нахождения квартилей в группированных данных можно использовать *огиву*. В этом случае на вертикальной оси накопленных частот выбирают точки таким образом, чтобы они делили общее значение накопленной частоты на четыре равные части. От этих значений до пересечения с огивой проведены горизонтальные линии. Величины переменных, соответствующих этим точкам на огиве, дают значения квартилей.

Пример. Приведенное ниже распределение частот описывает отработанное группой квалифицированных рабочих сверхурочное время за каждую из 48 рабочих недель года.

Диапазон [ч]	25...29	30...34	35...39	40...44	45...49	50...54	55...59
Количество	5	4	7	11	12	8	1

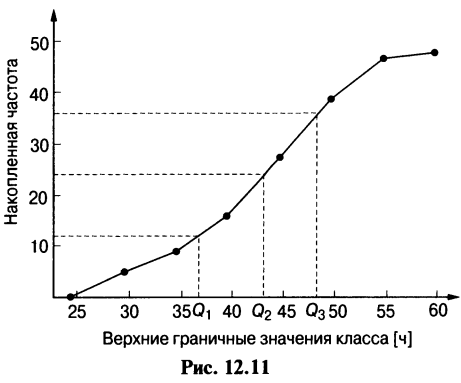


Рис. 12.11

Распределение накопленных частот (т. е. зависимость верхнее граничное значение класса/накопленная частота) таково:

Верхнее граничное значение класса	29.5	34.5	39.5	44.5	49.5	54.5	59.5
Накопленная частота	5	9	16	27	39	47	48

Наносим эти значения на график и получаем огиву, как показано на **Рис. 12.11**. Полную частоту делим на четыре равные части, размер каждой 48/4, т. е. 12. Значит, значения частот от 0 до 12 соответствуют первому квартилю, от 12 до 24 — второму, от 24 до 36 — третьему и от 36 до 48 — четвертому, т. е. распределение разбито на четыре части.

Значения квартилей, соответствующих величинам накопленных частот 12, 24 и 36, на **Рис. 12.11** обозначены Q_1, Q_2 и Q_3 соответственно. Эти величины с точностью до ближайшего часа равны **37 часов, 43 часа и 48 часов** соответственно. Величина Q_2 также равна срединному значению распределения. Одна из мер разброса данных называется ***полуинтерквартильный размах,*** который определяется как $\frac{Q_2 - Q_1}{2}$, и в данном случае это $\frac{48-37}{2}$, т. е. $5\frac{1}{2}$ ч.

Если множество содержит много элементов, его можно разбить на десять частей таким образом, чтобы каждая часть содержала одинаковое количество элементов. Эти десять частей называют ***децилями.*** Множество, содержащее очень много элементов, можно также разбить на сто частей с равным количеством элементов. Тогда каждая такая часть называется ***перцентилем.***

12.3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

12.3.1. Введение в теорию вероятностей

Вероятность некоторого события — это возможность или шанс. Значения вероятности лежат в пределах между 0 и 1, где 0 представляет абсолютную невозможность, а 1 — абсолютную возможность. Вероятность события лежит между этими двумя крайними значениями и выражается в виде правильной или десятичной дроби. Примеры вероятности:

кусок медного провода при 100° C имеет нулевое сопротивление	0
на игральных костях выпадет 3	$\frac{1}{6}$ или 0.1667
монета упадет орлом вверх	$\frac{1}{2}$ или 0.5
кусок медного провода при 100°C имеет некоторое сопротивление	1

Если p — это вероятность наступления некоторого события, а q — вероятность того, что это событие не случится, значит, общая вероятность есть $p + q$, и она равна единице, поскольку совершенно очевидно, что событие либо произойдет, либо не произойдет, т. е. $\boldsymbol{p + q = 1}$.

Математическое ожидание

Математическое ожидание E наступления события определяется произведением вероятности наступления события p на число проделанных попыток n, т. е. $\boldsymbol{E = pn}$.

Таким образом, поскольку вероятность выпадения 3 на кости равна $\frac{1}{6}$, то вероятность выпадения 3 в четырех бросках равна $\frac{1}{6} \times 4$, т. е. $\frac{2}{3}$.

Таким образом, математическое ожидание — это средняя частота наступления события.

Зависимое событие

Зависимое событие — это такое событие, вероятность которого зависит от вероятности другого события. Пусть наугад из группы 100 штук для проверки выбрано 5 транзисторов и получена вероятность появления неисправного транзистора p_1. Через некоторое время из оставшихся 95 наугад выбрано еще 5 транзисторов и получена вероятность появления неисправного транзистора p_2. Величина p_1 отличается от p_2, поскольку размер группы сократился от 100 до 95, т. е. вероятность p_2 зависит от вероятности p_1. Поскольку следующие 5 транзисторов выбирают, не заменив первые вынутые 5, говорят, что такой случайный выбор сделан ***без возврата***.

Независимое событие

Независимое событие — это такое событие, вероятность которого не зависит от вероятности другого события. Если из группы транзисторов наугад выбрано 5 штук и определена вероятность появления неисправного транзистора p_1, а затем процесс продолжен после возвращения первых 5 транзисторов обратно в группу и получена величина p_2, тогда $p_2 = p_1$. Поскольку после первого выбора 5 транзисторов возвращаются, второй выбор называется ***с возвратом***.

12.3.2. Законы действий с вероятностями

Закон сложения вероятностей

Закон сложения вероятностей применим, если интересующее нас событие определяется словом **«или»**, связывающим элементарные события. Если p_A — вероятность наступления события A и p_B — вероятность наступления события B, тогда вероятность наступления ***события А или события В*** равна $p_A + p_B$. Аналогично вероятность наступления событий ***А или В, или С, или... N*** определяется как

$$p_A + p_B + p_C + ... + p_N.$$

Закон умножения вероятностей

Закон умножения вероятностей применим, если интересующее нас событие определяется словом **«и»**, связывающим элементарные события. Если p_A — вероятность наступления события A и p_B — вероятность наступления события B, тогда вероятность наступления ***события А и события В*** равна $p_A \times p_B$. Аналогично вероятность наступления событий ***А и В, и С, и... N*** определяется как

$$p_A \times p_B \times p_C \times ... \times p_N.$$

Пример. Найти вероятность случайного выбора лошади, которая выиграет, если в забеге участвует 10 лошадей.

Поскольку может выиграть только одна лошадь из десяти, вероятность случайного выбора лошади-победителя равна

$$\frac{\text{количество победителей}}{\text{количество лошадей}}, \text{ т. е. } \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \text{ или } \mathbf{0.10}.$$

Определим вероятность случайного выбора лошади-победителя в двух забегах, если в каждом забеге участвует по 10 лошадей.

Вероятность выбора лошади-победителя в первом забеге равна $\frac{1}{10}$.

Вероятность выбора лошади-победителя во втором забеге равна $\frac{1}{10}$.

Вероятность выбора лошади-победителя в первом и втором забегах определяется законом умножения вероятностей, т. е. вероятность

$$p = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0.01}.$$

Пример. Вероятность выхода детали из строя в течение одного года из-за повышенной температуры составляет $\frac{1}{20}$, из-за избыточных вибраций — $\frac{1}{25}$ и из-за избыточной влажности — $\frac{1}{50}$.

Пусть p_A — вероятность выхода детали из строя из-за повышенной температуры, тогда $p_A = \frac{1}{20}$ и $\overline{p_A} = \frac{19}{20}$ (где $\overline{p_A}$ — вероятность, что деталь не выйдет из строя).

Пусть p_B — вероятность выхода детали из строя из-за избыточных вибраций, тогда

$$p_B = \frac{1}{25} \text{ и } \overline{p_B} = \frac{24}{25}.$$

Пусть p_C — вероятность выхода детали из строя из-за избыточной влажности, тогда

$$p_C = \frac{1}{50} \text{ и } \overline{p_C} = \frac{49}{50}.$$

Вероятность выхода детали из строя из-за повышенной температуры и избыточных вибраций равна

$$p_A \times p_B = \frac{1}{20} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{500} = \mathbf{0.002}.$$

Вероятность выхода детали из строя из-за избыточных вибраций или избыточной влажности равна

$$p_B + p_C = \frac{1}{25} + \frac{1}{50} = \frac{3}{50} = \mathbf{0.06}.$$

Вероятность того, что деталь не выйдет из строя из-за повышенной температуры и не выйдет из строя из-за избыточной влажности, равна

$$\overline{p_A} \times \overline{p_C} = \frac{19}{20} \times \frac{49}{50} = \frac{931}{1000} = \mathbf{0.931}.$$

Пример. Партия из 40 деталей содержит 5 дефектных. Наугад выбирается и проверяется одна деталь, затем вторая, тогда вероятность выбора одной дефектной детали при возврате и без возврата первой обратно определяется следующим образом.

Извлечение одной дефектной детали может быть осуществлено двумя способами. Если p — вероятность выбора дефектной детали, а q — вероятность выбора рабочей детали, то вероятность извлечения одной дефектной детали определяется извлечением рабочей детали, затем дефектной или извлечением дефектной детали, затем рабочей, т. е. $q \times p + p \times q$.

С возвратом:

$$p = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \text{ и } q = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$

Следовательно, вероятность извлечения одной дефектной детали равна $\frac{1}{8} \times \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{8}$, т. е. $\frac{7}{64} + \frac{7}{64} = \frac{7}{32} = \mathbf{0.2188}$.

Без возврата:

$p_1 = \frac{1}{8}$ и $q_1 = \frac{7}{8}$ в первом из двух извлечений. Количество деталей при втором извлечении равно 39, значит, $p_2 = \frac{5}{39}$ и $q_2 = \frac{35}{39}$.

$$p_1q_2 + q_1p_2 = \frac{1}{8} \times \frac{35}{39} + \frac{7}{8} \times \frac{5}{39} = \frac{35+35}{312} = \frac{70}{312} = \mathbf{0.2244}.$$

12.4. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

12.4.1. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение имеет дело только с двумя величинами — это вероятность наступления события p и вероятность отсутствия события q. Таким образом, если подброшена монета, тогда p — вероятность ее падения вверх орлом, а q — вероятность ее падения вверх решкой. Сумма $p + q$ должна равняться единице. Биномиальное распределение может быть использовано для определения, скажем, вероятности выпадения трех орлов за семь подбрасываний монеты или для нахождения процента брака по выборкам в промышленности. Одно из определений биномиального распределения таково:

> ***Если p — вероятность наступления события, а q — вероятность его отсутствия, то вероятности, что событие произойдет 1, 2, 3, ..., n раз за n попыток определяются последовательными членами разложения $(q + p)^n$, взятыми в порядке слева направо.***

Биномиальное разложение $(q + p)^n$ определяется формулой из разд. 1.16

$$q^n + nq^{n-1} + p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3 + \dots.$$

Пример. Пусть игральная кость подброшена 9 раз.

Пусть p — вероятность выпадения 4. Тогда $p = 1/6$, поскольку кость имеет шесть сторон.

Пусть q — вероятность того, что 4 не выпадет. Тогда $q = 5/6$. Вероятности, что 4 выпадет 0, 1, 2, ..., n раз определяются последовательными членами разложения $(q + p)^n$, взятыми слева направо.

Из биномиального разложения:

$$(q+p)^9 = q^9 + 9q^8p + 36q^7p^2 + 84q^6p^3 + \dots .$$

Вероятность, что 4 не выпадет ни разу:

$$q^9 = (5/6)^9 = \mathbf{0.1938}.$$

Вероятность, что 4 выпадет один раз:

$$9q^8p = 9(5/6)^8(1/6)^2 = \mathbf{0.3489.}$$

Вероятность, что 4 выпадет 2 раза:

$$36q^7p^2 = 36(5/6)^7(1/6)^2 = \mathbf{0.2791.}$$

Вероятность, что 4 выпадет 3 раза:

$$84q^6p^3 = 84(5/6)^6(1/6)^3 = \mathbf{0.1302}.$$

Вероятность выпадения 4 меньше 4 раз равна сумме вероятностей ее выпадения 0, 1, 2 и 3 раза, т. е.

$$0.1938 + 0.3489 + 0.2791 + 0.1302 = \mathbf{0.9520}.$$

12.4.2. Отбраковка в промышленности

При промышленной отбраковке p часто принимается за вероятность того, что деталь дефектная, а q — как вероятность того, что деталь рабочая. В данном случае определение биномиального распределения выглядит следующим образом:

> ***Вероятности того, что 0, 1, 2, 3, ..., n деталей, взятых наугад из группы n штук, дефектные, определяются последовательными членами разложения $(q + p)^n$, взятыми в порядке слева направо.***

Пример. В упаковке содержится 50 одинаковых деталей, и проверка показала, что четыре из них были повреждены при перевозке. Пусть из содержимого упаковки наугад извлекается шесть деталей.

Вероятность того, что деталь повреждена, p, составляет 4 из 50, т. е. 0.08 на единицу. Таким образом, вероятность того, что деталь не повреждена, q, составляет $1 - 0.08$, т. е. 0.92. Вероятность повреждения 0, 1, 2, ..., 6 деталей определяется членами биномиального разложения, взятыми в порядке слева направо:

$$(q+p)^6 = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 20q^3p^3 + \dots .$$

Вероятность обнаружения одной дефектной детали равна $6q^5p = = 6 \times 0.92^5 =$ **0.3164**. Вероятность обнаружения менее чем трех дефектных деталей определяется суммой вероятностей обнаружения 0, 1 и 2 дефектных деталей:

$$q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 = 0.92^6 + 6 \times 0.92^5 \times 0.08 + 15 \times 0.92^4 \times 0.08^2 =$$
$$= 0.6064 + 0.3164 + 0.0688 = \mathbf{0.9916}.$$

12.4.3. Распределение Пуассона

Если число попыток n в биномиальном распределении велико (обычно «велико» — это больше 10), тогда вычисления для определения значений членов разложения становятся трудоемкими. Если n велико, а p мало и произведение np меньше 5, то хорошую аппроксимацию биномиального распределения дает распределение Пуассона, для которого вычисления, как правило, проще.

Аппроксимация Пуассона для биномиального распределения может быть найдена следующим образом:

Вероятности, что событие произойдет 0, 1, 2, 3, ..., n раз за n попыток, определяются последовательными членами выражения $e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots\right)$, ***взятыми в порядке слева направо.***

Символ λ — это математическое ожидание наступления события, оно равно np.

Пример. Пусть 3% производимых компанией зубчатых колес дефектные, и пусть рассматривается выборка из 80 колес.

Величина выборки n велика, вероятность появления дефектного зубчатого колеса p мала, и произведение np равняется 80×0.03, т. е. 2.4, что меньше 5. Следовательно, можно использовать аппроксимацию Пуассона для биномиального распределения. Математическое ожидание появления дефектного зубчатого колеса $\lambda = np = 2.4$.

Вероятности обнаружения 0, 1, 2,... дефектных зубчатых колес определяется последовательными членами выражения $e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots\right)$, взятыми в порядке слева направо, т. е. $e^{-\lambda}, \lambda e^{-\lambda}, \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \dots$. Таким образом, вероятность отсутствия дефектных колес $e^{-\lambda} = e^{-2.4} =$ **0.0907**; вероятность наличия одного дефектного колеса $\lambda e^{-\lambda} = 2.4e^{-2.4} = \mathbf{0.2177}$; вероятность наличия двух дефектных колес $\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{2.4^2 e^{-2.4}}{2 \times 1} = \mathbf{0.2613}$.

Вероятность наличия более двух дефектных колес равна 1 – (сумма вероятностей наличия 0, 1, 2 дефектных зубчатых колес), т. е.

$$1 - (0.0907 + 0.2177 + 0.2613) = \mathbf{0.4303}.$$

Распределение Пуассона в основном применяется для нахождения теоретических вероятностей, если известна вероятность наступления события, p, а вероятность отсутствия события, q, неизвестна. Например, можно вычислить среднее количество забиваемых за футбольный матч голов, но вычислить количество тех голов, что не были забиты, невозможно. Для такого типа задач распределение Пуассона имеет следующее определение:

> ***Вероятности наступления события 0, 1, 2, 3, ... раз определяются последовательными членами выражения*** $e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)$***, взятыми в порядке слева направо.***

Символ λ — это средняя частота (вероятность) наступления события.

Пример. В производственном цехе имеется 35 одинаковых фрезерных станков. Средняя вероятность появления поломок для каждого станка составляет 0.06 в неделю.

Поскольку средняя вероятность появления поломок известна, а средняя вероятность отсутствия поломок неизвестна, следует использовать распределение Пуассона. Математическое ожидание поломок для 35 станков составляет 35 × 0.06, т. е. 2.1 поломка в неделю. Вероятности появления поломок 0, 1, 2, ..., n раз определяются последовательными членами выражения $e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)$, взятыми в порядке слева направо. Следовательно:

Вероятность отсутствия поломок: $e^{-\lambda} = e^{-2.1} = \mathbf{0.1225}$.

Вероятность появления 1 поломки: $\lambda e^{-\lambda} = 2.1e^{-2.1} = \mathbf{0.2572}$.

Вероятность появления 2 поломок: $\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{2.1^2 e^{-2.1}}{2 \times 1} = \mathbf{0.2700}$.

Вероятность появления менее 3 поломок в неделю — это сумма вероятностей появления 0, 1 и 2 поломок в неделю, т. е.

$$0.1225 + 0.2572 + 0.2700 = \mathbf{0.6497}.$$

12.5. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

12.5.1. Введение в теорию нормального распределения

Если получены некоторые данные, их зачастую можно рассматривать как выборку (т. е. небольшое количество элементов), случайным образом взятую из большой совокупности (т. е. множества, содержащего большое число элементов). При большом размере выборки теоретически возможно задать очень маленькие интервалы группирования, но каждый класс все равно не будет пустым. Тогда многоугольник частот для этих данных содержит много коротких отрезков и аппроксимируется непрерывной кривой. Подобная кривая называется *частотной кривой* или *кривой распределения*.

Очень важная симметричная кривая распределения называется ***кривой нормального распределения***, она показана на **Рис. 12.12**. Кривая может быть описана математическим выражением и является основой для многих разделов более сложной статистики. Множество часто встречающихся на практике показателей, например рост и вес людей, размеры изготавливаемых на неком станке деталей, срок службы некоторых узлов и деталей, подчиняются нормальному распределению.

Рис. 12.12

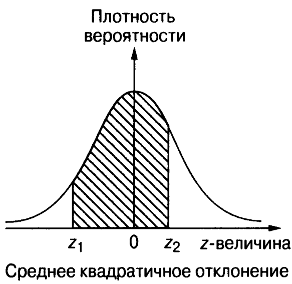


Рис. 12.13

Кривые нормального распределения могут отличаться друг от друга следующими характеристиками:

- иметь различные средние значения;
- иметь различные значения средних квадратичных отклонений;
- переменными могут служить различные величины в различных единицах измерения;
- площади под кривой могут быть различными.

Кривая нормального распределения нормируется следующим образом:

- среднее значение ненормированной кривой принимается за начало координат так, что ее среднее значение $\overline{x}$ становится нулем;
- горизонтальная ось масштабируется в единицах среднего квадратичного отклонения. Это осуществляют, полагая $z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$, где z — *нормированная случайная величина, x* — исходная переменная, $\overline{x}$ — среднее значение распределения, σ — среднее квадратичное отклонение распределения;
- площадь между нормальной кривой и горизонтальной осью берется равной единице.

Если кривая нормального распределения нормирована, тогда она называется *нормированной кривой нормального распределения*, и любые нормально распределенные данные могут быть представлены одинаковыми нормированными кривыми нормального распределения.

Площадь под частью кривой нормального распределения прямо пропорциональна вероятности, и величина заштрихованной площади на **Рис. 12.13** может быть получена вычислением интеграла

$$\int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{(z^2/2)} dz,$$

где $z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$. Чтобы не определять значения этой функции каждый раз заново, во многих математических книгах приводятся таблицы значений площади под нормированной кривой нормального распределения; примером может служить **Табл. 12.4**.

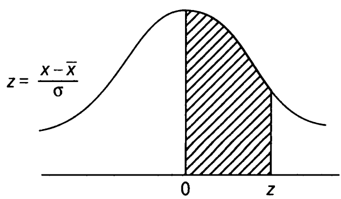


Рис. 12.14

Пример. Пусть средний рост 500 человек равен 170 см, а среднее квадратичное отклонение — 9 см. Предполагая, что рост имеет нормальное распределение, найти количество людей, имеющих рост от 150 до 195 см.

Таблица 12.4. *Площадь под нормированной кривой нормального распределения, приведенной на* **Рис. 12.14**

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0159	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0678	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1388	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2086	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2760	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3451	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4430	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4762	0.4767
2.0	0.4472	0.4778	0.4783	0.4785	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4882	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4980	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Среднее значение $\overline{x}$ составляет 170 см и соответствует нормированной случайной величине z, равной нулю на нормированной кривой нормального распределения. Росту 150 см соответствует значение z, определяемое как $z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$ средних квадратичных отклонений, т. е. $\dfrac{150-170}{9}$ или -2.22 средних квадратичных отклонений. Используем таблицу площадей под нормированной кривой нормального распределения (**Табл. 12.4**), откуда получаем, что значение z, равное -2.22, соответствует площади 0.4868 между средним значением и ординатой $z = -2.22$. Знак минус перед величиной z показывает, что она лежит слева от ординаты $z = 0$.

Данная площадь заштрихована на **Рис. 12.15а**. Аналогично, росту 195 см соответствует величина $z = \dfrac{195-170}{9}$, это 2.78 средних отклонений. Из **Табл. 12.4**: величина z соответствует площади 0.4973. Величина z положительна, значит, она лежит справа от ординаты $z = 0$. Эта площадь заштрихована на **Рис. 12.15б**. На **Рис. 12.15в** заштрихована общая площадь с **Рис. 12.15а** и **Рис. 12.15б**, она равна 0.4868 + 0.4973, т. е. площадь под кривой равна 0.9841.

Однако площадь прямо пропорциональна вероятности. Таким образом, вероятность, что человек имеет рост в пределах между 150 и 195 см, равна 0.9841. Для группы 500 человек: 500×0.9841, т. е. **в заданном диапазоне, вероятно, попадает рост 492 человек**. Величина 500×0.9841 равна 492.05, но поскольку ответы для нормального распределения могут быть только приблизительными, результат обычно округляется до ближайшего целого числа.

Аналогично определим число людей с ростом менее 165 см.

Высота 165 см соответствует $\dfrac{165-170}{9}$, т. е. -0.56 средних квадратичных отклонений. Площадь между $z = 0$ и $z = -0.56$ (из **Табл. 12.4**) равна 0.2123, она заштрихована на **Рис. 12.16а**. Общая площадь под нормированной кривой нормального распределения равна единице, а поскольку кривая симметрична, значит, общая площадь слева от ординаты $z = 0$ равна 0.5000. Таким образом, площадь слева от ординаты $z = -0.56$ («слева» означает «меньше чем», «справа» — «больше чем») равна 0.5000 —— 0.2123, т. е. 0.2877 от общей площади, заштрихованной на **Рис. 12.16б**. Эта площадь прямо пропорциональна вероятности, и, поскольку общая площадь под нормированной кривой нормального распределения равна единице, вероятность того, что рост человека менее 165 см, равна 0.2877. Для группы из 500 людей математическое ожидание равно 500×0.2877, т. е. **рост 144 человек из этой группы, вероятно, меньше 165 см.**

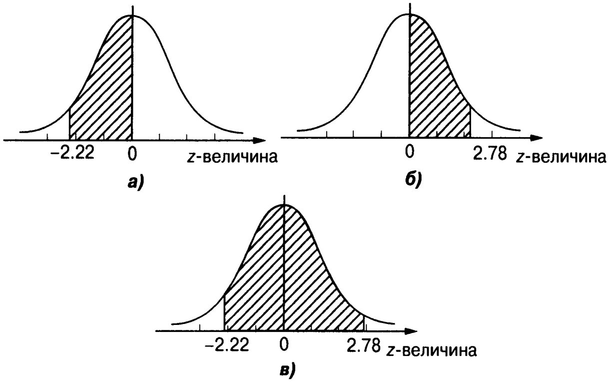


Рис. 12.15

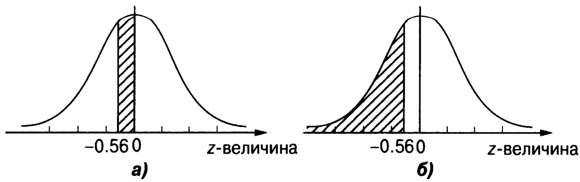


Рис. 12.16

12.5.2. Признаки нормального распределения

Не следует думать, что если данные непрерывные, то они автоматически подчиняются нормальному закону распределения. Один из способов проверить, подчиняются ли данные нормальному закону распределения, — использовать *нормальную вероятностную бумагу*; ее часто называют просто *вероятностной бумагой*. Это специальная бумага с линейной разметкой вдоль одной оси и значениями вероятности в процентах от 0.1 до 99.99 вдоль другой оси (**Рис. 12.17**). Деления по оси вероятности таковы, что график для нормально распределенных данных имеет форму прямой при построении зависимости накопленной частоты от значений границ интервалов. Если точки не лежат достаточно близко к прямой линии, значит, данные не распределены по нормальному закону.

Среднее значение и среднее квадратичное отклонение данных с нормальным распределением может быть найдено с помощью нормальной вероятностной бумаги. Для данных с нормальным распределением площадь под нормированной кривой нормального распределения и величина z для единицы (т. е. одного единичного отклонения) может быть получена из **Табл. 12.4**. Для единичного среднего квадратичного отклонения эта площадь равна 0.3413 или 34.13%. Площадь для ±1 среднего квадратичного отклонения симметрично расположена с каждой стороны от $z = 0$, т. е. симметрично расположены на каждой стороне 50% значения накопленной частоты. Таким образом, соответствующая стандартному отклонению ±1 площадь лежит между значениями накопленной частоты (50 + 34.13)% и (50 – 34.13)%, т. е. между 84.13 и 15.87%. Для большинства задач рассматривают интервал от 84 до 16 %. Так, при использовании вероятностной бумаги среднее квадратичное отклонение определяется выражением

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{значение переменной для}\\ 84\%\,\text{накопленной частоты}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{значение переменной для}\\ 16\%\ \text{накопленной частоты}\end{pmatrix}}{2}.$$

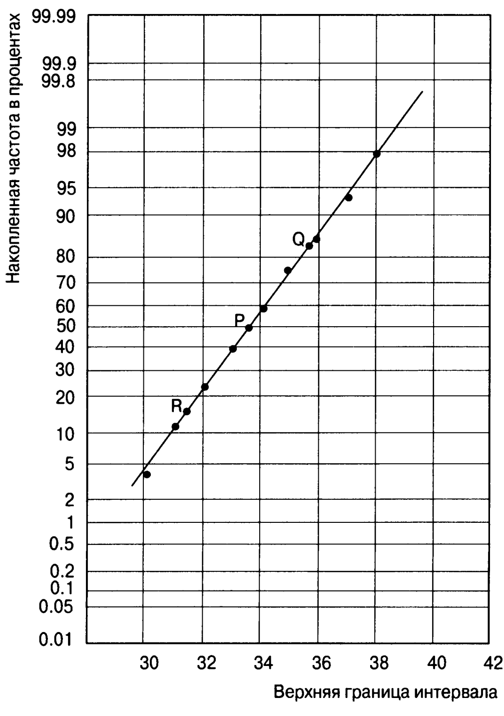


Рис. 12.17

Пример. Приведенные ниже данные характеризуют вес 50 медных болванок.

Значение срединной точки интервала [кг]	29.5	30.5	31.5	32.5	33.5	34.5	35.5	36.5	37.5	38.5
Частота	2	4	6	8	9	8	6	4	2	1

Чтобы проверить, является ли распределение нормальным, на нормальной вероятностной бумаге строят график зависимости значений верхней границы интервала от накопленной частоты в процентах. Значения верхних границ интервала: 30, 31, 32, ..., 38, 39. Соответствующие величины накопленных частот (для значений, меньше граничных): 2, (4 + 2) = 6, (6 + 4 + 2) = = 12, 20, 29, 37, 43, 47, 49 и 50.

Соответствующие величины накопленных частот: $\frac{2}{50} \times 100 = 4$, $\frac{6}{50} \times 100 = 12, 24, 40, 58, 74, 86, 94, 98$ и 100%.

Зависимости верхних границ интервалов от значений накопленной частоты построены на **Рис. 12.17**. При построении этих значений всегда невозможно нанести координату для 100% накопленной частоты, поскольку максимальное значение на шкале вероятностей 99.99. **Поскольку точки на Рис. 12.17 лежат очень близко к прямой линии, значит, закон распределения данных близок к нормальному.**

Среднее значение и среднее квадратичное отклонение могут быть найдены из **Рис. 12.17**. Поскольку кривая нормального распределения симметрична, среднее значение переменной соответствует 50% накопленной частоты; это точка P на графике. Отсюда видно, что **среднее значение равно 33.6 кг**. Среднее квадратичное отклонение определяем, используя значения накопленной частоты 84 и 16%, отмеченные точками Q и R на **Рис. 12.17**. Значения переменных для Q и R составляют 35.7 и 31.4 соответственно. Итак, два средних квадратичных отклонения соответствуют 35.7 – 31.4, т. е. 4.3, значит, среднее квадратичное отклонение распределения составляет приблизительно $\frac{4.3}{2}$, т. е. **среднее квадратичное отклонение равно 2.15**.

12.6. ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

12.6.1. Введение

Корреляция — это мера статистической связи двух переменных. Рассмотрим случай линейной корреляции. Если на график нанесен ряд точек и все они принадлежат прямой линии, говорят об *идеальной линейной корреляции*. Если через лежащие на графике точки можно провести прямую линию с положительным наклоном, то говорят о существовании *положительной*, или *прямой*, *линейной корреляции*; она показана на **Рис. 12.18а**. Если через принадлежащие графику точки можно провести прямую линию с отрицательным наклоном, говорят, что имеет место *отрицательная*, или *обратная*, *корреляция*; см. **Рис. 12.18б**. В случае, когда между нанесенными на график равноправными координатами не существует очевидной связи, точки не коррелированы, и в прямоугольной системе координат мы имеем *диаграмму разброса*, показанную на **Рис. 12.18в**.

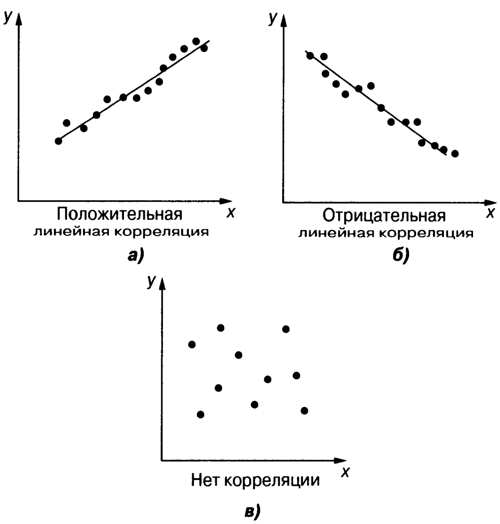


Рис. 12.18

12.6.2. Формула смешанных моментов для определения коэффициента линейной корреляции

Линейная корреляция между двумя переменными выражается через *коэффициент корреляции*, обозначаемый буквой r. Он определяется по величинам отклонения координат двух переменных от среднего значения и вычисляется по *формуле смешанных моментов*:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\left\{(\sum x^2)(\sum y^2)\right\}}}, \qquad (1)$$

где x — величины отклонений координаты X от среднего значения $\overline{X}$, y — величины отклонений координаты Y от среднего значения $\overline{Y}$, т. е. $x = (X - \overline{X})$ и $y = (Y - \overline{Y})$. Из этого определения следует, что величина r лежит в интервале $-1 \ldots +1$, где -1 означает совершенную линейную обратную корреляцию, $+1$ — совершенную прямую линейную корреляцию, 0 — отсутствие корреляции. Чем меньше величина r в этом диапазоне, тем меньше степень существующей корреляции. Если значения r лежат в пределах от 0.7 до 1 и от -0.7 до -1, то, как правило, это указывает на большую степень корреляции.

Пример. В эксперименте по определению зависимости между приложенной к проволоке силой и итоговым растяжением получены следующие данные:

Сила [Н]	10	20	30	40	50	60	70
Растяжение [мм]	0.22	0.40	0.61	0.85	1.20	1.45	1.70

Определим для этих данных линейный коэффициент корреляции следующим образом.

Пусть X — это переменное значение силы, а Y — зависящее от силы переменное значение растяжения. Коэффициент корреляции определяется следующим образом:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\left\{(\sum x^2)(\sum y^2)\right\}}},$$

где $x = (X - \overline{X})$ и $y = (Y - \overline{Y})$, $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения величин X и Y соответственно. Используем табличный метод определения величин, входящих в эту формулу:

X	Y	$x = (X - \overline{X})$	$y = (Y - \overline{Y})$	xy	x^2	y^2
10	0.22	−30	−0.699	20.97	900	0.489
20	0.40	−20	−0.519	10.38	400	0.269
30	0.61	−10	−0.309	3.09	100	0.095
40	0.85	0	−0.069	0	0	0.005
50	1.20	10	0.281	2.81	100	0.079
60	1.45	20	0.531	10.62	400	0.282
70	1.70	30	0.781	23.43	900	0.610
$\sum X = 280$	$\sum Y = 6.43$			$\sum xy =$	$\sum x^2 =$	$\sum y^2 =$
$\overline{X} = \frac{280}{7} = 40$	$\overline{Y} = \frac{6.43}{7} \approx$			$= 71.30$	$= 2800$	$= 1.829$
	≈ 0.919					

Таким образом, $r = \dfrac{71.3}{\sqrt{[2800 \times 1.829]}} \approx \mathbf{0.996}$.

Это показывает ***очень хорошую прямую линейную корреляцию*** между значениями силы и растяжения.

12.6.3. Значимость коэффициента корреляции

Получив по формуле произведения моментов значение коэффициента корреляции, прежде чем сделать выводы, необходимо проверить следующие два обстоятельства:

- Проверить связи «причина-следствие» между переменными. Математически довольно просто доказать наличие корреляции между, скажем, количеством проданного за некий период времени мороженого и количеством прочищенных за тот же период печных труб, хотя на самом деле между этими переменными нет причинной взаимосвязи.
- Проверить наличие линейной корреляции между переменными, так как приведенная выше формула смешанных моментов верна именно для линейной корреляции. Может иметь место идеальная нелинейная корреляция (например, точки точно ложатся на кривую $y = x^3$), но в этом случае коэффициент корреляции будет мал, поскольку величина r определяется по основанной на линейной зависимости формуле смешанных моментов.

12.7. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

12.7.1. Введение в линейную регрессию

Регрессионный анализ, обычно называемый *регрессией,* используется для построения на графике линии «наилучшего соответствия». Данный метод позволяет составить математическое уравнение прямой линии вида $y = mx + c$ для заданного множества координат. При этом полученная прямая такова, что сумма средних квадратичных отклонений значений координат от прямой минимальна, т. е. это линия наилучшего соответствия. В ходе регрессионного анализа можно получить две линии наилучшего соответствия в зависимости от того, какая переменная выбирается зависимой, а какая — независимой. Например, протекающий в резистивной электрической схеме ток прямо пропорционален приложенному к схеме напряжению. Существует два способа получения экспериментальных величин, связывающих ток и напряжение. Либо к схеме прикладывается определенное напряжение и измеряется ток, при этом напряжение является независимой переменной, а ток — зависимой, либо напряжение подстраивается для получения определенного значения тока, при этом ток является независимой переменной, а напряжение — зависимой.

12.7.2. Линейная регрессия методом наименьших квадратов

Пусть для заданного множества координат $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$ X — независимая переменная, а Y — зависимая. Пусть $D_1, \ldots, D_N$ — расстояния по вертикали между прямой, обозначенной на **Рис. 12.19** как PQ, и точками, представляющими значения координат. Линейная регрессия методом наименьших квадратов, т. е. прямая наилучшего соответствия, — это прямая, для которой значение $D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_N^2$ минимально.

Уравнение прямой, обеспечивающей регрессию методом наименьших квадратов, обычно записывают в виде $Y = a_0 + a_1X$, где a_0 — пересечение с осью Y, a_1 — тангенс угла наклона прямой (аналогично c и m в уравнении $y = mx + c$). Такие значения a_0 и a_1, при которых сумма квадратов отклонений минимальна, могут быть получены из двух уравнений:

$$\sum Y = a_0N + a_1\sum X, \qquad (1)$$

$$\sum(XY) = a_0\sum X + a_1\sum X^2, \qquad (2)$$

где X и Y — значения координат, N — количество координат, а a_0 и a_1 называются *коэффициентами регрессии* Y по X. Уравнения (1) и (2) называются *нормальными уравнениями* линии регрессии Y по X. Линия регрессии Y по X используется для оценки значений Y при заданных значениях X.

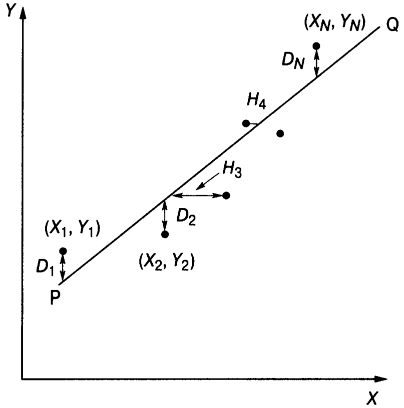


Рис. 12.19

Если значения Y (вертикальная ось) выбираются в качестве независимых переменных, то расстояния по горизонтали от прямой, обозначенной на **Рис. 12.19** PQ, и значениями координат (H_3, H_4 и так далее) считаются отклонениями. Уравнение линейной регрессии имеет вид $X = b_0 + b_1 Y$, и нормальные уравнения приобретают вид

$$\sum X = b_0 N + b_1 \sum Y, \tag{3}$$

$$\sum(XY) = b_0 \sum Y + b_1 \sum Y^2, \tag{4}$$

где X и Y — значения координат, b_0 и b_1 — коэффициенты регрессии X по Y, а N — количество точек. Эти нормальные уравнения описывают линейную регрессию X по Y, которая немного отличается от линейной регрессии Y по X. Линейная регрессия X по Y используется для оценки значений X при заданных значениях Y. Линейная регрессия Y по X используется для определения значения Y, соответствующего заданному значению X. Если величина Y лежит в диапазоне между крайними значениями Y, процесс определения соответствующего значения X называется *линейной интерполяцией*. Если эта величина лежит вне диапазона крайних значений Y, процесс называется *линейной экстраполяцией*, и должно быть сделано предположение, что линия наилучшего соответствия продлевается за пределы заданного диапазона. При использовании линии регрессии X по Y значения X, соответствующие заданным значениям Y, могут быть найдены как методом интерполяции, так и методом экстраполяции.

Например, ниже приведены экспериментальные величины, связывающие центростремительную силу и радиус для движущейся по кругу с постоянной скоростью массы.

Сила [Н]	5	10	15	20	25	30	35	40
Радиус [см]	55	30	16	12	11	9	7	5

Пусть независимой переменной будет радиус X, а зависимой — сила Y. (Данное решение обычно бывает основано на том, что X — это причина, а Y — следствие.)

Уравнение линейной регрессии зависимости силы от радиуса имеет вид $Y = a_0 + a_1 X$, и константы a_0 и a_1 определяются из выражений

$$\sum Y = a_0 N + a_1 \sum X \text{ и } \sum(XY) = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2$$

(это уравнение (1) и (2)).

Используем табличный подход для определения значений сумм.

Радиус, X	Сила, Y	X^2	XY	Y^2
55	5	3025	275	25
30	10	900	300	100
16	15	256	240	225
12	20	144	240	400
11	25	121	275	625
9	30	81	270	900
7	35	49	245	1225
5	40	25	200	1600
$\sum X = 145$	$\sum Y = 180$	$\sum X^2 = 4601$	$\sum XY = 2045$	$\sum Y^2 = 5100$

Таким образом, $180 = 8a_0 + 145a_1$ и $2045 = 145a_0 + 4601a_1$.

Решаем данную систему уравнений, в итоге получаем $a_0 = 33.7$ и $a_1 = -0.617$ с точностью до 3 значащих цифр. Итак, выражение для линии регрессии зависимости силы от радиуса имеет вид $\mathbf{Y = 33.7 - 0.617X}$.

Таким образом, сила Y при радиусе, скажем, 40 см, равна

$$Y = 33.7 - 0.617(40) = 9.02.$$

То есть **при радиусе 40 см сила равна 9.02 Н**.

Уравнение линии регрессии зависимости радиуса от силы имеет вид $X = b_0 + b_1 Y$, и константы b_0 и b_1 определяются из уравнений (3) и (4).

Значения сумм были определены выше, откуда следует, что

$$145 = 8b_0 + 180b_1 \quad \text{и} \quad 2045 = 180b_0 + 5100b_1.$$

Решаем данную систему уравнений, в итоге получаем $b_0 = 44.2$ и $b_1 = -1.16$ с точностью до 3 значащих цифр. Итак, выражение для линии регрессии зависимости радиуса от силы имеет вид $\mathbf{X = 44.2 - 1.16Y}$.

Таким образом, радиус X при силе, скажем, 32 Н, равен

$$X = 44.2 - 1.16(32) = 7.08 \text{ Н}.$$

То есть **при силе 32 Н радиус равен 7.08 см**.

12.8. ТЕОРИЯ ВЫБОРОК И ОЦЕНОК

12.8.1. Введение

Элементарные понятия теории выборок и оценок, представленные в данной главе, послужат основой для более подробного изучения используемых в промышленности методов приемочного контроля и контроля качества. Подобные теории достаточно сложны, и в данной главе полная трактовка теорий и вывод формул опущены, для ясности рассмотрены только основные понятия.

12.8.2. Выборочное распределение

В статистике не всегда возможно рассмотреть все элементы множества, и тогда из совокупности извлекается *выборка* или множество выборок. Обычно слово «выборка» означает *случайную выборку*. Если все элементы совокупности имеют равные шансы быть выбранными, то выборка из такой совокупности называется случайной. Выборка, не являющаяся случайной, называется *смещенной,* и это обычно имеет место, если что-то влияет на выбор.

Если по случайной выборке необходимо сделать прогноз о совокупности, то перед составлением прогноза зачастую извлекается множество выборок из, скажем, N элементов. Если вычислено среднее значение и среднее квадратичное отклонение каждой выборки, оказывается, что для разных выборок результаты различны, даже несмотря на то, что все они взяты из одной совокупности. Для теорий из следующих разделов важно знать, случайна ли разница между этими результатами или эти различия связаны некоторым образом. Если из совокупности случайным образом взято M выборок из N элементов, тогда средние значения для M выборок образуют множество данных. Аналогично средние квадратичные отклонения для M выборок вместе образуют множество данных. Множество данных, полученное для множества выборок из некоторой совокупности, называются *выборочным распределением*. Они часто используются для описания случайных колебаний средних значений и средних квадратичных отклонений, основанных на случайном выборе.

12.8.3. Выборочное распределение средних значений

Предположим, что необходимо получить выборку по два элемента из множества, содержащего пять элементов. Если это множество — пять букв: A, B, C, D и E, тогда различные варианты выборок таковы: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE.

Это десять различных выборок. Число возможных выборок в данном случае определяется как $\frac{5 \times 4}{2 \times 1}$, т. е. 10. Аналогично количество способов, которыми можно получить выборки по три элемента, составляет $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$, т. е. 120. Отсюда следует, что, если из большой совокупности извлекается маленькая выборка, тогда существует большое количество различных комбинаций элементов. Если существует большое число различных выборок, тогда в средних значениях выборок из одной совокупности возможны большие вариации.

Обычно, чем больше размер выборки, тем ближе ее среднее значение к среднему значению всей совокупности. Рассмотрим множество 3, 4, 5, 6 и 7. Для выборки из двух элементов минимальное среднее значение составляет: $\frac{3+4}{2}$, т. е. 3.5, максимальное — $\frac{6+7}{2}$, т. е. 6.5, итоговый диапазон значений: 6.5 – 3.5 = 3. Для выборки из трех членов диапазон составляет от $\frac{3+4+5}{3}$ до $\frac{5+6+7}{3}$, т. е. 2. При увеличении числа элементов в выборке диапазон средних значений выборок уменьшается, пока, в предельном случае, выборка не будет включать все члены набора, тогда диапазон станет нулевым. Если из совокупности выбирается много элементов и составляется выборочное распределение средних значений, то диапазон средних значений мал, поскольку число выбранных элементов велико. Поскольку диапазон мал, следовательно, средние квадратичные отклонения средних значений также будут малы, поскольку зависят от разницы между средними значениями выборочного распределения. Взаимосвязь между средними отклонениями средних значений выборочного распределения и количеством элементов в каждой выборке может быть выражена следующим образом.

Теорема 1 гласит:

> ***Если из конечной совокупности N_p взяты все возможные выборки размера N без возвратов и определено среднее квадратичное отклонение для выборочного распределения средних значений, то***
>
> $$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)},$$
>
> ***где $\sigma_{\bar{x}}$ — среднее квадратичное отклонение выборочного распределения средних значений, а σ — среднее квадратичное отклонение совокупности.***

Среднее квадратичное отклонение выборочного распределения средних величин называется *средней квадратичной погрешностью средних величин.*

Средняя квадратичная погрешность средних значений

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)}. \tag{1}$$

Уравнение (1) применимо к конечной совокупности размера N_p и/или выборок без возвратов. Слово «погрешность» в термине «средняя квадратичная погрешность средних значений» не означает, что была совершена ошибка, оно свидетельствует о наличии некоторой неопределенности при прогнозировании среднего значения совокупности на основе средних значений выборок. Формула средней квадратичной погрешности средних значений верна для любого размера выборки N. Если N_p очень велико по сравнению с N или если совокупность бесконечна (этот случай аналогичен взятию выборок с возвратом), то поправочный коэффициент $\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)}$ стремится к единице, и уравнение (1) приобретает вид

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{2}$$

Уравнение (2) применимо к бесконечным совокупностям и/или взятию выборок с возвратом.

Теорема 2 гласит:

> ***Если взяты все возможные выборки размера N из совокупности размера N_p, то среднее значение выборочного распределения средних значений***
>
> $$\mu_{\bar{x}} = \mu, \tag{3}$$
>
> ***где μ — среднее значение совокупности.***

На практике из совокупности все выборки размера N не извлекают. Однако если размер выборки велик (обычно это 30 и больше), то соотношение между средним значением выборочного распределения средних значений и средним значением совокупности очень близко к указанному выражению (3). Аналогично соотношение между среднеквадратичной погрешностью средних значений и среднеквадратичным отклонением совокупности очень близко к уравнению (2).

Другая важная особенность выборочного распределения состоит в том, что если размер выборки N велик, то ***выборочное распределение средних значений аппроксимируется нормальным распределением*** со средним значением $\mu_{\bar{x}}$ и средним квадратичным отклонением $\sigma_{\bar{x}}$. Это верно для всех нормально распределенных совокупностей, а также совокупностей, не распределенных нормально, при условии, что размер совокупности минимум в 2 раза больше размера выборки. Это свойство нормальности выборочного распределения основано на частном случае *центральной предельной теоремы*, важной теоремы теории выборок. Поскольку выборочное распределение средних значений и средних квадратичных отклонений является нормальным, то можно использовать таблицу площадей под нормированной кривой нормального распределения (**Табл. 12.4**) для определения вероятности и того, что определенная выборка лежит, скажем, в интервале ±1 среднее квадратичное отклонение, и так далее.

Пример. Рост 3000 людей распределен по нормальному закону со средним значением 175 см и средним квадратичным отклонением 8 см. Взяты случайные выборки по 40 человек. Среднее квадратичное отклонение и среднее значение выборочного распределения средних значений вычисляются при условии: а) возврата, б) без возврата; и могут быть спрогнозированы следующим образом:

Для совокупности	Число элементов	$N_p = 3000$
	Среднее квадратичное отклонение	$\sigma = 8$ см
	Среднее значение	$\mu = 175$ см
Для выборок	Размер каждой выборки	$N = 40$

а) Если выборки осуществляются *с возвратом*, тогда общее число возможных выборок (две и более могут быть одинаковы) бесконечно. Следовательно, из уравнения (2) средняя квадратичная погрешность средних значений (т. е. средняя квадратичная погрешность выборочного распределения средних значений):

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{8}{\sqrt{40}} = \mathbf{1.265\ см}.$$

Из уравнения (3), **среднее значение выборочного распределения**

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = \mathbf{175\ см}.$$

б) Если выборка осуществляется *без возврата,* тогда общее количество возможных выборок конечно, следовательно, можно применить уравнение (1). Таким образом, средняя квадратичная погрешность средних значений

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)} = \frac{8}{\sqrt{40}}\sqrt{\left(\frac{3000 - 40}{3000 - 1}\right)} =$$
$$= 1.265 \times 0.9935 = \mathbf{1.257\ см}.$$

Как было установлено выше из уравнения (3), среднее выборочного распределения средних значений одинаково для конечных и бесконечных совокупностей при условии, что выборка велика. Следовательно, из уравнения (3), $\mu_{\bar{x}} = \mathbf{175\ см}$.

12.8.4. Оценка параметров совокупности по выборке большого размера

Если совокупность велика, искать ее среднее значение и среднее квадратичное отклонение по базовым формулам нецелесообразно. На самом деле, если совокупность бесконечна, определить эти значения невозможно. Для больших и бесконечных совокупностей величины среднего значения и среднего квадратичного отклонения могут быть найдены с использованием данных, полученных по взятым из этой совокупности выборкам.

Точечная и интервальная оценка

Оценка параметров совокупности, таких как среднее значение или среднее квадратичное отклонение, одним числом называется *точечной оценкой*. Оценка параметров совокупности двумя числами, между которыми, как предполагается, лежит значение параметра, называется *интервальной оценкой*. Таким образом, если оценивается длина предмета и полученный результат составляет 150 см, это и есть точечная оценка. Если результат имеет вид 150 ± 10 см, тогда это интервальная оценка, и она показывает, что длина лежит в пределах от 140 до 160 см. В общем, точечная оценка не дает представления о том, насколько близко полученное значение к истинному значению величины, и должна дополняться $\overline{x}$ информацией для оценки этого свойства. Задание погрешности, или точности, оценки часто называется ее *достоверностью*. В статистике при проведении оценки параметров совокупности на базе выборок обычно используется интервальная оценка. Слово «оценка» не означает, что наш подход к определению параметра состоит в предположении «давайте положим, что величина равна...», оно значит, что тщательно выбирается некое значение и дополнительно определяется степень достоверности этой оценки.

Доверительные интервалы

Ранее было установлено, что при взятии выборок из совокупности среднее значение этих выборок распределено приблизительно нормально; значит, образующие выборочное распределение средних значений величины тоже распределены приблизительно нормально. Если для каждой выборки определены средние квадратичные отклонения, то они тоже распределены приблизительно нормально, а значит, средние квадратичные отклонения выборочного распределения средних квадратичных отклонений распределены приблизительно нормально. Такие параметры выборочного распределения, как среднее значение или среднее квадратичное отклонение, называются *выборочной статистикой, S*. Пусть μ_S — среднее значение выборочной статистики выборочного распределения, т. е. среднее значение выборок или среднее значение средних квадратичных отклонений выборок. Пусть σ_S — среднее квадратичное отклонение выборочной статистики от выборочного распределения, т. е. среднее квадратичное отклонение средних величин выборок или среднее квадратичное отклонение средних квадратичных отклонений выборок. Поскольку выборочное распределение средних величин и средних квадратичных отклонений подчиняются нормальному закону, можно спрогнозировать вероятность попадания выборочной статистики в приведенные ниже интервалы с помощью таблицы площадей под нормированной кривой нормального распределения (**Табл. 12.4** со стр. 467):

- среднее значение ± 1 среднее квадратичное отклонение,
- среднее значение ± 2 средних квадратичных отклонения,
- среднее значение ± 3 средних квадратичных отклонения.

Согласно этой таблице, соответствующее величине $z = +1$ среднее квадратичное отклонение составляет 0.413, т. е. площадь, соответствующая величине (± 1 среднее квадратичное отклонение), равна 2×0.3413, это 68.26%. Таким образом, процентная вероятность попадания выборочной статистики в интервал (среднее значение ± 1 среднее квадратичное отклонение) равна 68.26%. Аналогично вероятность попадания статистики в интервал (среднее значение ± 2 средних квадратичных отклонения) равна 95.44%, в интервал (среднее значение ± 3 средних квадратичных отклонения) — 99.74%.

Величины 68.26, 95.44 и 99.74% называются *доверительными уровнями* для оценки выборочной статистики. Доверительный уровень 68.26% ассоциируется с двумя различными значениями: это $S -$ (1 среднее квадратичное отклонение), т. е. $S - \sigma_S$, и $S +$ (1 среднее квадратичное отклонение), т. е. $S + \sigma_S$.

Эти два значения называются *доверительными границами* оценки, а расстояние между доверительными границами называется *доверительным интервалом*. Доверительный интервал характеризует математическое ожидание попадания оценки статистики совокупности в заданный интервал, если эта оценка сделана на основе выборочной статистики. На основе **Табл. 12.4** составлена **Табл. 12.5**, в ней приведены некоторые используемые на практике доверительные уровни и соответствующие им значения z (некоторые приведенные величины получены интерполяцией). Если таблица используется в данном контексте, тогда величины z обычно обозначаются z_C и называются *доверительными коэффициентами*.

Любые другие значения доверительных уровней и соответствующих им доверительных коэффициентов можно найти, используя **Табл. 12.4**.

Пример. Найти доверительный коэффициент, соответствующий доверительному уровню 98.5%.

98.5% эквивалентно относительному значению 0.9850. Это показывает, что площадь под нормированной кривой нормального распределения между $-z_C$ и $+z_C$, т. е. $2z_C$, составляет 0.9850 от общей площади. Следовательно, площадь между средним значением и z_C составляет $\frac{0.9850}{2}$, т. е. 0.4925 от общей площади. Величина z, соответствующая площади 0.4925, равна 2.43 средних квадратичных отклонений из **Табл. 12.4**. Таким образом, **доверительный коэффициент, соответствующий доверительному уровню 98.5%, равен 2.43**.

Таблица 12.5

Доверительный уровень [%]	99	98	96	95	90	80	50
Доверительный коэффициент, z_C	2.58	2.33	2.05	1.96	1.645	1.28	0.6745

12.8.5. Оценка среднего значения совокупности, если известно среднее квадратичное отклонение совокупности

Если из большой совокупности извлекается выборка с известным средним квадратичным отклонением, то можно найти среднее значение выборки $\overline{x}$. Это среднее значение можно использовать для оценки среднего значения совокупности μ. При этом оценочное среднее значение совокупности задается лежащим между двумя значениями, т. е. в доверительном интервале между доверительными границами. Если для оценочного значения μ необходимо получить высокий доверительный уровень, то ширина доверительного интервала велика. Например, если необходимо получить доверительный уровень 96%, то из **Табл. 12.5** видим, что доверительный интервал лежит в пределах от $-z_C$ и $+z_C$, это $2 \times 2.05 = 4.10$ средних квадратичных отклонений. Наоборот, низкий доверительный уровень соответствует узкому доверительному интервалу, и для доверительного уровня, скажем, 50% доверительный интервал равен 2×0.6745, это 1.3490 средних квадратичных отклонений. Доверительный уровень оценки среднего значения совокупности 68.26% определяется следующим образом: берется среднее значение μ, равное среднему $\overline{x}$, затем задается доверительный интервал оценки. Поскольку доверительный уровень 68.26% соответствует ± 1 среднему квадратичному отклонению от среднего значения выборочного распределения, значит, доверительный уровень 68.26% для оценки среднего значения совокупности задается в виде $x + \sigma_{\overline{x}}$.

В общем случае, при оценке может быть получен любой конкретный доверительный уровень в виде $x \pm z_C\sigma_{\overline{x}}$, где z_C — доверительный коэффициент, соответствующий заданному доверительному уровню. Таким образом, доверительные границы среднего значения совокупности для доверительного уровня 96% суть $\bar{x} \pm 2.05\sigma_{\bar{x}}$.

Поскольку была взята только одна выборка, средняя квадратичная погрешность среднего значения $\sigma_{\bar{x}}$ неизвестна. Однако ранее было показано, что

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)}.$$

Таким образом, доверительные границы среднего значения совокупности суть

$$\bar{x} \pm \frac{z_C\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P - N}{N_P - 1}\right)} \tag{4}$$

для совокупности конечного размера N_p.

Доверительные границы среднего значения совокупности суть

$$\bar{x} \pm \frac{z_C\sigma}{\sqrt{N}} \tag{5}$$

для бесконечной совокупности.

Таким образом, оценка среднего значения бесконечной совокупности со средним квадратичным отклонением σ для выборки размером N и средним значением $\bar{x}$ составляет, например, $\bar{x} \pm \frac{2.33\sigma}{\sqrt{N}}$ для доверительного уровня 98%. Это означает, что среднее значение совокупности лежит между $\bar{x} - \frac{2.33\sigma}{\sqrt{N}}$ и $\bar{x} + \frac{2.33\sigma}{\sqrt{N}}$ с вероятностью 98%.

Пример. Обнаружено, что среднее квадратичное отклонение диаметров заклепок, изготавливаемых за долгий период определенной машиной, составляет 0.018 см. Из изготовленных данной машиной за день заклепок извлекается случайная выборка 100 штук, средний диаметр заклепки в выборке равен 0.476 см. Если машина изготавливает 2500 заклепок в день, тогда: а) доверительный уровень 90% и б) доверительный уровень 97% для оценки среднего диаметра всех заклепок, изготовленных машиной за день, определяются следующим образом.

Для совокупности	Среднее квадратичное отклонение	$\sigma = 0.018$ см
	Размер	$N_p = 2500$
Для выборки	Размер	$N = 100$
	Среднее значение	$\bar{x} = 0.476$ см

Это конечная выборка, и среднее квадратичное отклонение совокупности известно, поэтому можно использовать уравнение (4).

а) Для доверительного уровня 90%, согласно **Табл. 12.5**, величина z_C — доверительный коэффициент — составляет 1.645. Следовательно, оценочные значения доверительных границ среднего значения совокупности μ суть

$$0.476 \pm \left(\frac{(1.645)(0.018)}{\sqrt{100}}\right)\sqrt{\left(\frac{2500-100}{2500-1}\right)}.$$

То есть **0.476 ± (0.00296)(0.9800) = 0.476 ± 0.0029 см**.

Это означает, что если средний диаметр для выборки из 100 заклепок равен 0.476 см, то ожидается, что средний диаметр всех заклепок лежит в пределах между 0.473 и 0.479 см, и этот прогноз должен быть верным в девяти случаях из десяти.

б) Для доверительного уровня 97% величина z_C должна определяться по таблице площадей под нормированной кривой нормального распределения, т. е. **Табл. 12.4**, но не из **Табл. 12.5**. Общая площадь между ординатами $-z_C$ и $+z_C$ составляет 0.9700. Поскольку нормированная кривая нормального распределения симметрична, площадь между $z_C = 0$ и z_C составляет $\frac{0.9700}{2}$, т. е. 0.4850. Согласно **Табл. 12.4**, площади 0.4850 соответствует значение $z_C = 2.17$.

Следовательно, оценки доверительных границ для среднего значения совокупности таковы:

$$\bar{x} \pm \frac{z_C\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\left(\frac{N_P-N}{N_P-1}\right)} = 0.476 \pm \left(\frac{(2.17)(0.018)}{\sqrt{100}}\right)\sqrt{\left(\frac{2500-100}{2500-1}\right)} =$$

$$= 0.476 \pm (0.0039)(0.9800) = 0.476 \pm 0.0038.$$

Таким образом, **доверительные границы суть 0.472 и 0.480 см**.

Можно увидеть, что большее значение доверительного уровня в данном случае приводит к получению большего доверительного интервала.

12.8.6. Оценка среднего значения и среднего квадратичного отклонения совокупности по выборочным данным

Если среднее квадратичное отклонение большой совокупности неизвестно, из нее извлекают несколько выборок. Тогда могут быть найдены среднее значение выборочного распределения средних значений $\mu_{\bar{x}}$ и среднее квадратичное отклонение выборочного распределения средних (т. е. средняя квадратичная погрешность средних) $\sigma_{\bar{x}}$. Доверительные границы среднего значения совокупности μ определяются как

$$\mu_{\bar{x}} \pm z_C \sigma_{\bar{x}}, \tag{6}$$

где z_C — доверительный коэффициент, соответствующий заданному доверительному уровню.

Чтобы оценить квадратичное отклонение, σ, нормально распределенной совокупности,

- формируем выборочное распределение средних квадратичных отклонений и
- по базовой формуле определяем квадратичное отклонение этого выборочного распределения.

Это квадратичное отклонение называется погрешностью квадратичных отклонений и обычно обозначается σ_S. Если s — квадратичное отклонение выборки, тогда доверительные границы квадратичного отклонения совокупности определяются как

$$s \pm z_C \sigma_S, \tag{7}$$

где z_C — доверительный коэффициент, соответствующий заданному доверительному уровню.

Пример. Из большой группы извлекаются несколько выборок по 50 предохранителей и проверяются при работе с 10%-ным током перегрузки. Среднее значение выборочного распределения времени, через которое предохранители выходят из строя, составляет 16.50 мин. Средняя квадратичная погрешность средних составляет 1.4 минуты. Расчетное среднее время до выхода из строя группы предохранителей при доверительном уровне 90% определяется следующим образом:

для выборочного распределения — среднее $\mu_{\bar{x}} = 16.50$,
квадратичная погрешность средних $\sigma_{\bar{x}} = 1.4$.

Оценка среднего значения совокупности проводится только по выборочному распределению, поэтому используется выражение (6).

Для доверительного уровня 90% $z_C = 1.645$ (из **Табл. 12.5**). Таким образом,

$$\mu_{\bar{x}} \pm z_C \sigma_{\bar{x}} = 16.50 \pm (1.645)(1.4) = 16.50 \pm 2.30 \text{ мин.}$$

Итак, **для доверительного уровня 90% среднее значеиие времени до выхода из строя составляет от 14.20 до 18.80 мин.**

12.8.7. Оценка среднего значения совокупности по выборке малого размера

Использованные выше методы оценки среднего значения и среднего квадратичного отклонения совокупности пригодны только для выборок достаточно большого размера, обычно от 30 и больше. Это связано с тем, что при большом объеме выборки выборочное распределение параметра имеет вид, близкий к нормальному. Если размер выборки мал, скажем, менее 30, то при уменьшении размера выборки описанные выше методы оценки параметров совокупности становятся все более неточными, поскольку выборочное распределение больше не аппроксимируется нормальным. В начале XX в. У. С. Госсет[1] провел исследования по влиянию малых выборок на теорию оценок, и как результат его работы существуют таблицы, позволяющие проводить практические оценки при малом размере выборок. В этих таблицах приводятся значения t, определенные из соотношения $t = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s}\sqrt{(N-1)}$, где $\bar{x}$ — среднее значение выборки, μ — среднее значение совокупности, из которой взята эта выборка, s — квадратичное отклонение выборки, N — размер выборки. Госсет публиковал свои исследования под псевдонимом «Student», поэтому его таблицы часто называют *распределение Стьюдента.*

Для взятой случайным образом малой выборки доверительные границы среднего значения совокупности определяются выражением

$$\bar{x} \pm \frac{t_C s}{\sqrt{N-1}}. \tag{8}$$

В данной оценке t_C называется доверительным уровнем для малых выборок, он аналогичен z_C для больших выборок, s — квадратичное отклонение выборки, x — среднее значение выборки, N — размер выборки. В **Табл. 12.6** приведены процентные значения t-распределения Стьюдента с ν степенями свободы (площадь заштрихованной области на **Рис. 12.20** равна p).

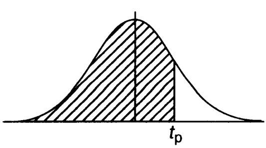


Рис. 12.20

[1] У. С. Госсет (William S. Gosset) — английский статистик и пионер развития современных статистических методов. — *Примеч. ред.*

Таблица 12.6. *Процентные значения t-распределения Стьюдента*

ν	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	0.842	0.674	0.524	0.253	0.126

Столбцы в **Табл. 12.6** озаглавлены t_p, где p равно 0.995, 0.99, 0.975, ..., 0.55. Для доверительного уровня, скажем, 95% надо выбрать столбец с заголовком $t_{0.95}$ и так далее. Строки озаглавлены греческой буквой «ню» ν и пронумерованы от 1 до 30 с шагом 1, а также содержат значения 40, 60, 120 и ∞. Эти числа представляют величину, называемую *степенями свободы*, которые определяются следующим образом:

> ***Размер выборки N минус количество тех параметров совокупности, которые должны быть определены для данной выборки.***

При определении значения t из выражения $t = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s}\sqrt{(N-1)}$ необходимо знать параметры выборки $\bar{x}$ и s, а также параметр совокупности μ. Значения $\bar{x}$ и s можно вычислить для выборки, но, как правило, требуется выполнить оценку среднего значения совокупности μ по среднему значению для выборки. Число степеней свободы ν определяется числом независимых наблюдений в выборке, N, минус количество тех параметров совокупности, которые надо оценить, т. е. $\nu = N - k$. Для выражения $t = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s}\sqrt{(N-1)}$ необходимо найти только μ, следовательно, $k = 1$ и $\nu = N - 1$.

При определении среднего значения совокупности по выборке малого размера необходимо найти только один параметр совокупности, следовательно, ν всегда можно считать равным $(N - 1)$.

Пример. Имеется выборка 12 измерений диаметра прута, и среднее значение выборки составляет 1.850 см. Квадратичное отклонение выборки равно 0.16 мм. Найти доверительные границы при доверительном уровне: а) 90% и б) 70% для оценки действительного диаметра прута следующим образом.

Для выборки: размер выборки $N = 12$, среднее значение $\bar{x} = 1.850$ см; квадратичное отклонение $s = 0.16$ мм $= 0.016$ см.

Поскольку размер выборки меньше 30, следует использовать оценку по малой выборке, приведенную в выражении (8). Число степеней свободы, т. е. размер выборки минус число искомых параметров совокупности, равно 12 – 1, т. е. 11.

а) Процентную величину, соответствующую доверительному коэффициенту $t_{0.90}$ и числу степеней свободы $\nu = 11$, можно найти в **Табл. 12.6**, она составляет 1.36, т. е. $t_C = 1.36$. Оценку среднего значения совокупности находим из выражения

$$\bar{x} \pm \frac{t_C s}{\sqrt{(N-1)}} = 1.850 \pm \frac{(1.36)(0.016)}{\sqrt{11}} = 1.850 \pm 0.0066 \text{ см}.$$

Итак, при **90% доверительные границы суть 1.843 и 1.857 см.**

Это означает, что действительные диаметры могут лежать в пределах от 1.843 до 1.857 см, и это утверждение верно с вероятностью 90%.

б) Процентную величину, соответствующую уровню $t_{0.70}$ и $\nu = 11$, берем из **Табл. 12.6**, она составляет 0.540, т. е. $t_C = 0.540$.

Оценки 70% доверительных границ определяются из выражения

$$\bar{x} \pm \frac{t_C s}{\sqrt{(N-1)}} = 1.850 \pm \frac{(0.540)(0.016)}{\sqrt{11}} = 1.850 \pm 0.0026 \text{ см.}$$

Итак, при **70% доверительные границы суть 1.847 и 1.853 см,** т. е. действительный диаметр прута лежит в пределах между 1.847 и 1.853 см, и вероятность этого 70%.

Глава 13

Преобразования Лапласа

13.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

13.1.1. Введение

Решение большинства задач по электрическим схемам в конечном счете может быть сведено к решению дифференциальных уравнений. Применение *преобразования Лапласа* представляет альтернативу рассмотренному в разд. 11.1...11.5 методу решения линейных дифференциальных уравнений.

13.1.2. Определение преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$ задается интегралом $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, где s — параметр, который полагается действительным числом.

Основные обозначения преобразования Лапласа

Существуют различные часто используемые обозначения преобразования Лапласа от функции $f(t)$, они включают:

- $\mathcal{L}\{f(t)\}$ или $L\{f(t)\}$;
- $\mathcal{L}(f)$ или Lf;
- $\bar{f}(s)$ или $f(s)$.

Иногда для обозначения параметра используют букву p вместо буквы s. В данной книге для исходной функции будет использоваться обозначение $f(t)$, а для ее преобразования Лапласа — обозначение $\mathcal{L}f(t)$.

Из сказанного выше следует, что

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt} \qquad (1)$$

13.1.3. Линейность преобразования Лапласа

Из уравнения (1):

$$\mathcal{L}\{kf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}kf(t)dt = k\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

т. е.

$$\mathcal{L}\{kf(t)\} = k\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad (2)$$

где k — любая константа.

Аналогично

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(af(t)dt+bg(t))dt =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt,$$

т. е.

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}, \quad (3)$$

где a и b — любые действительные константы.

Благодаря свойствам, продемонстрированным в уравнениях (2) и (3), преобразование Лапласа является **линейным оператором**.

13.1.4. Преобразования Лапласа от элементарных функций

Используя определение преобразования Лапласа из уравнения (1), можно преобразовать ряд элементарных функций; результаты преобразования приведены в **Табл. 13.1**.

Например, из уравнений (2) и (3).

$$\mathcal{L}\left\{1+2t-\frac{1}{3}t^4\right\} = \mathcal{L}\{1\}+2\mathcal{L}\{t\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{t^4\} =$$

$$= \frac{1}{s}+2\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{4!}{s^{4+1}}\right),$$

что, согласно п.1, 6 и 8 **Табл. 13.1**, равно

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{s^5}\right) = \mathbf{\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{8}{s^5}}.$$

Пример. Из уравнений (2) и (3) и согласно п. 3 **Табл. 13.1**

$$\mathcal{L}\{5e^{2t} - 3e^{-t}\} = 5\mathcal{L}(e^{2t}) - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} =$$

$$= 5\left(\frac{1}{s-2}\right) - 3\left(\frac{1}{s-(-1)}\right) =$$

$$= \frac{5}{s-2} - \frac{3}{s+1} = \frac{5(s+1) - 3(s-2)}{(s-2)(s+1)} = \frac{\mathbf{2s+11}}{\mathbf{s^2 - s - 2}}.$$

Таблица 13.1. *Преобразования Лапласа для элементарных функций*

п/п	Функция $f(t)$	Преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	k	$\frac{k}{s}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$
7	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
8	t^n $(n = 1, 2, 3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Пример.

$\mathcal{L}\{6\sin 3t - 4\cos 5t\} = 6\mathcal{L}\{\sin 3t\} - 4\mathcal{L}\{\cos 5t\}$. Согласно п. 4 и 5 из **Табл. 13.1**, это равно

$$6\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right) - 4\left(\frac{s}{s^2+5^2}\right) =$$

$$= \frac{18}{s^2+9} - \frac{4s}{s^2+25}.$$

Пример.

$\mathcal{L}\{2\mathrm{ch}2\theta - \mathrm{sh}3\theta\} = 2\mathcal{L}\{\mathrm{ch}2\theta\} - \mathcal{L}\{\mathrm{sh}3\theta\}$. Согласно п. 9 и 10 из **Табл. 13.1**, это равно

$$2\left(\frac{s}{s^2-2^2}\right) - \left(\frac{3}{s^2-3^2}\right) = \frac{2s}{s^2-4} - \frac{3}{s^2-9}.$$

13.2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

13.2.1. Преобразование Лапласа от $e^{at}f(t)$

Согласно разд. 13.1, преобразование Лапласа от функции $f(t)$ имеет вид

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt. \qquad (1)$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at}f(t))dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)}f(t)\,dt, \qquad (2)$$

где a — действительная константа.

Следовательно, подстановка $(s - a)$ вместо s в преобразование из уравнения (1) соответствует умножению исходной функции на e^{at}. Это *теорема о сдвиге.*

13.2.2. Преобразования Лапласа от функций вида $e^{at}f(t)$

Преобразования Лапласа от функций вида $e^{at}f(t)$ приведены в **Табл. 13.2**.

Таблица 13.2. *Преобразования Лапласа от функций вида $e^{at}f(t)$*

п/п	**Функция $e^{at}f(t)$** (a — **действительная константа**)	**Преобразование Лапласа** $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$
1	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
2	$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
3	$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
4	$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
5	$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$

Пример. Согласно п. 1 из **Табл. 13.2**,

$$\mathcal{L}\{2t^4e^{3t}\} = 2\mathcal{L}\{t^4e^{3t}\} = 2\left(\frac{4!}{(s-3)^{4+1}}\right) = \frac{2(4)(3)(2)}{(s-3)^5} = \mathbf{\frac{48}{(s-3)^5}}$$

Пример. Согласно п. 3 из **Табл. 13.2**,

$$\mathcal{L}\{4e^{3t}\cos 5t\} = 4\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 5t\} = 4\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}\right) =$$

$$= \frac{4(s-3)}{s^2-6s+9+25} = \mathbf{\frac{4(s-3)}{s^2-6s+34}}.$$

13.2.3. Преобразования Лапласа для производных

Первая производная

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ \text{или} \quad \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\} = s\,\mathcal{L}\{y\} - y(0) \end{array}} \qquad (3)$$

где $y(0)$ — это значение y при $x = 0$.

Вторая производная

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \\ \text{или}\quad &\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = s^2\,\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \end{aligned}} \qquad (4)$$

где $y'(0)$ — это значение при $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = 0$.

Уравнения (3) и (4) важны и используются при решении дифференциальных уравнений (см. разд. 13.4) и систем дифференциальных уравнений (см. разд. 13.5).

13.2.4. Теоремы о начальном и конечном значениях

Существует несколько связанных с преобразованием Лапласа теорем, используемых для упрощения и интерпретации решения определенных задач. Две подобные теоремы — это теоремы о начальном и конечном значениях.

Теорема о начальном значении имеет вид

$$\boxed{\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\mathcal{L}\{f(t)\}]}$$

Пример. Проверить справедливость теоремы о начальном значении для функции напряжения $(5 + 2\cos 3t)$ вольт.

Пусть $f(t) = 5 + 2\cos 3t$. Согласно п. 2 и 5 из **Табл. 13.1** со стр. 494,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{5 + 2\cos 3t\} = \frac{5}{s} + \frac{2s}{x^2+9}.$$

По теореме о начальном значении $\lim\limits_{t\to 0}[f(t)] = \lim\limits_{s\to\infty}[s(\mathcal{L}\{f(t)\})]$,

т. е. $\lim\limits_{t\to 0}[5 + 2\cos 3t] = \lim\limits_{s\to\infty}\left[s\left(\dfrac{5}{s} + \dfrac{2s}{s^2+9}\right)\right] = \lim\limits_{s\to\infty}\left[5 + \dfrac{2s^2}{s^2+9}\right]$,

т. е.

$$5 + 2(1) = 5 + \frac{2\infty^2}{\infty^2+9} = 5 + 2.$$

Итак, $7 = 7$, что подтверждает теорему для рассмотренного случая.

Таким образом, начальное значение напряжения равно **7 В**.

Теорема о конечном значении гласит:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty}[f(t)] = \lim_{s \to 0}[s\mathcal{L}\{f(t)\}]}$$

Пример. Проверить справедливость теоремы о конечном значении на примере функции $(2 + 3e^{-2t}\sin 4t)$ см, которая описывает смещение частицы.

Пусть $f(t) = 2 + 3e^{-2t}\sin 4t$.

Согласно п. 2 из **Табл. 13.1** со стр. 494 и п. 2 из **Табл. 13.2** со стр. 496,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}[2 + 3e^{-2t}\sin 4t] = \frac{2}{s} + 3\left(\frac{4}{(s-(-2)) + 4^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{12}{(s+2)^2 + 16}.$$

По теореме о конечном значении:

$$\lim_{t \to \infty}[f(t)] = \lim_{s \to 0}[s\mathcal{L}\{f(t)\}],$$

т. е.

$$\lim_{t \to \infty}[2 + 3e^{-2t}\sin 4t] = \lim_{s \to 0}\left[s\left(\frac{2}{s} + \frac{12}{(s+2)^2 + 16}\right)\right] =$$

$$= \lim_{s \to 0}\left[\left(2 + \frac{12s}{(s+2)^2 + 16}\right)\right].$$

Итак, 2 + 0 = 2 + 0, т. е. **2 = 2**, что доказывает справедливость теоремы в данном случае.

Итак, окончательное значение смещения составляет **2 см**.

Теоремы о начальном и конечном значениях используются при расчете импульсных схем, где интерес представляют отклики схемы за малый период или поведение схемы после замыкания ключа. Теорема о конечном значении, в частности, применяется при исследовании стабильности систем (таких как автоматические системы посадки самолетов) и связана установившейся реакцией для больших промежутков времени t, т. е. когда все переходные процессы завершились.

13.3. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

13.3.1. Определение обратного преобразования Лапласа

Если преобразование Лапласа функции $f(t)$ — это $F(s)$, т. е. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, то $f(t)$ называется *обратным преобразованием Лапласа* от функции $F(s)$ и записывается в виде

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Пример. Поскольку $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, то $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \mathbf{1}$.

Пример. Поскольку $\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, то

$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin at$ и так далее.

13.3.2. Обратное преобразование Лапласа от элементарных функций

Для нахождения обратных преобразований Лапласа можно использовать таблицы, подобные **Табл. 13.1** и **13.2**.

Пример. Согласно п. 4 из **Табл. 13.1**: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin at$.

Следовательно,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\} = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{1}{3}\sin 3t.$$

Пример. $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3s-1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3\left(s-\frac{1}{3}\right)}\right\} = \frac{5}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-\frac{1}{3}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{5}{3}e^{(1/3)t}$$

(согласно п. 3 из **Табл. 13.1**).

Пример. Найти $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}$.

Согласно п. 8 из **Табл. 13.1**, чтобы s находилось в степени 4, должно быть $n = 3$.

Таким образом, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = t^3$, т. е. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = t^3$.

Следовательно, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = \frac{1}{2}t^3$.

Пример. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7s}{s^2+4}\right\} = 7\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2^2}\right\} = 7\cos 2t$

(согласно п. 5 из **Табл. 13.1**).

Пример. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2-4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s-2)^2+3^2}\right\} = e^{2t}\sin 3t$

(согласно п. 2 из **Табл. 13.2**).

Пример.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2-4s-5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s-2)^2-3^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(s-2)+5}{(s-2)^2-3^2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-2}{(s-2)^2-3^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-2)^2-3^2}\right\},$$

что, согласно п. 5 из **Табл. 13.2**, равно

$$4e^{2t}\operatorname{ch} 3t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}(3)}{(s-2)^2-3^2}\right\}.$$

Согласно п. 4 из **Табл. 13.2**, в свою очередь данное выражение равно

$$4e^{2t}\operatorname{ch}3t + \frac{5}{3}e^{2t}\operatorname{sh}3t.$$

13.3.3. Обратное преобразование Лапласа с использованием простейших дробей

Иногда требуется найти обратное преобразование Лапласа от функции, которую нельзя привести к стандартному виду, подобно функциям из **Табл. 13.1** и **13.2**. В таких случаях можно разложить функцию на простейшие дроби, которые легко преобразовать. Например, функция

$$F(x) = \frac{2s-3}{s(s-3)}$$

не может быть преобразована по **Табл. 13.1**. Однако, разложив ее на простейшие дроби $\frac{2s-3}{s(s-3)} \equiv \frac{1}{s} + \frac{1}{s-3}$, получаем обратное преобразование Лапласа $1 + e^{3t}$ согласно п. 1 и 3 из **Табл. 13.1**.

Простейшие дроби рассматриваются в разд. 1.14, а формы простейших дробей приводятся в **Табл. 1.3** со стр. 83.

Пример. Найти $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-5}{s^2-s-2}\right\}$.

$$\frac{4s-5}{s^2-s-2} \equiv \frac{4s-5}{(s-2)(s+1)} \equiv \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)} \equiv \frac{A(s+1)+B(s-2)}{(s-2)(s+1)}.$$

Следовательно, $4s - 5 \equiv A(s+1) + B(s-2)$.

Если $s = 2$, то $3 = 3A$, откуда $A = 1$.

Если $s = -1$, то $-9 = -3B$, откуда $B = 3$.

Следовательно, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-5}{s^2-s-2}\right\} \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{3}{s+1}\right\} =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\} = \boldsymbol{e^{2t} + 3e^{-t}}$$ (из п. 3 **Табл. 13.1**).

Пример. Найти $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}\right\}$.

$$\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)} \equiv \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)} \equiv \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+3)}{(s+3)(s^2+1)}.$$

Следовательно, $5s^2 + 8s - 1 \equiv A(s^2+1) + (Bs+C)(s+3)$.

Если $s = -3$, то $20 = 10A$, откуда $A = 2$.

Приравниваем коэффициенты при s^2, получаем $5 = A + B$, откуда $B = 3$, так как $A = 2$.

Приравниваем коэффициенты при s, получаем $8 = 3B + C$, откуда $C = -1$, так как $B = 3$.

Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}\right\} \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{3s-1}{s^2+1}\right\} =$$

$$\equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 2e^{-3t} + 3\cos t - \sin t$$

(согласно п. 3, 5 и 4 из **Табл. 13.1**).

13.4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

13.4.1. Введение

Кроме методов решения дифференциальных уравнений, представленных в разд. 11.1...11.5, существует другой способ: с использованием преобразования Лапласа. Рассмотрим его подробнее.

13.4.2. Процедура решения дифференциальных уравнений с использованием преобразования Лапласа

1. Берем преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения по формуле преобразования Лапласа от производных (т. е. уравнения (3) и (4) из разд. 13.2), используя по возможности список стандартных преобразований Лапласа из **Табл. 13.1** и **13.2**.
2. Подставляем начальные условия, т. е. $y(0)$ и $y'(0)$.
3. Преобразуем уравнение, чтобы сделать искомым $\mathcal{L}\{y\}$.
4. Находим y, используя по необходимости разложение на простейшие дроби и применяя обратное преобразование Лапласа ко всем членам с помощью **Табл. 13.1** и **13.2**.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ с условием, что при $x = 0$ имеем $y = 4$ и $\frac{dy}{dx} = 9$.

Применим рассмотренную выше процедуру:

1. $2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$.

Из уравнений (3) и (4) из разд. 13.2,

$$2[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + 5[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 3\mathcal{L}\{y\} = 0.$$

2. $y(0) = 4$ и $y'(0) = 9$.

Тогда $2[s^2\mathcal{L}\{y\}-4s-9]+5[s\mathcal{L}\{y\}-4]-3\mathcal{L}\{y\} = 0$, т. е.

$$2s^2\mathcal{L}\{y\}-8s-18+5s\mathcal{L}\{y\}-20-3\mathcal{L}\{y\} = 0.$$

3. Совершаем перестановку: $(2s^2+5s-3)\mathcal{L}\{y\} = 8s+38$,

т. е. $\mathcal{L}\{y\} = \dfrac{8s+38}{2s^2+5s-3}$.

4. $y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s+38}{2s^2+5s-3}\right\}$.

$$\frac{8s+38}{2s^2+5s-3} \equiv \frac{8s+38}{(2s-1)(s+3)} \equiv \frac{A}{2s-1}+\frac{B}{s+3} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(s+3)+B(2s-1)}{(2s-1)(s+3)}.$$

Следовательно, $8s + 38 = A(s + 3) + B(2s - 1)$.

При $s = \dfrac{1}{2}$ имеем $42 = 3\dfrac{1}{2}A$, откуда $A = 12$.

При $s = -3$ имеем $14 = -7B$, откуда $B = -2$.

Следовательно,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s+38}{2s^2+5s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{2s-1}-\frac{2}{s+3}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{2s-\frac{1}{2}}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\}.$$

Следовательно, $y = 6e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-3x}$ (согласно п. 3 из **Табл. 13.1**).

Пример. Решить уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx} = 9$ с условием, что при $x = 0$ выполняется $y = 0$ и $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

1. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^2y}{dx^2}\right\}-3\mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\} = \mathcal{L}\{9\}$.

Следовательно, $[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - 3[s\mathcal{L}(y - y(0))] = \frac{9}{s}$.

2. $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

Следовательно, $s^2 \mathcal{L}\{y\} - 3s\mathcal{L}\{y\} = \frac{9}{s}$.

3. Перегруппировываем: $(s^2 - 3s)\mathcal{L}\{y\} = \frac{9}{s}$. То есть

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{9}{s(s^2 - 3s)} = \frac{9}{s^2(s-3)}.$$

4. $y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(x-3)}\right\}$.

$$\frac{9}{s^2(x-3)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} \equiv \frac{A(s)(s-3) + B(s-3) + Cs^2}{s^2(s-3)}.$$

Следовательно, $9 \equiv A(s)(s-3) + B(s-3) + Cs^2$.

При $s = 0$ имеем $9 = -3B$, откуда $B = -3$.

При $s = 3$ имеем $9 = 9C$, откуда $C = 1$.

Приравниваем содержащие s^2 члены: $0 = A + C$, откуда $A = -1$, поскольку $C = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s-3}\right\} =$$

$$= -1 - 3x + e^{3x}$$

(согласно п. 1, 6 и 3 из **Табл. 13.1**).

Итак, $\boldsymbol{y = e^{3x} - 3x - 1}$.

13.5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

13.5.1. Введение

Иногда требуется решить систему дифференциальных уравнений. Например, если имеются два электрических контура с магнитным взаимодействием, то уравнения, связывающие токи i_1 и i_2, обычно имеют вид

$$L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = E_1,$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0,$$

где L — индуктивность, R — сопротивление, M — взаимоиндукция, E_1 — электродвижущая сила, приложенная к одному из контуров.

13.5.2. Процедура решения систем уравнений с использованием преобразования Лапласа

1. Берем преобразование Лапласа от обеих частей каждого уравнения системы, применяя формулы преобразования Лапласа для производных (т. е. уравнения (3) и (4) из разд. 13.2 со стр. 496) и используя преобразования Лапласа стандартных функций, например из **Табл. 13.1** со стр. 494 и **13.2** со стр. 496.

2. Подставляем начальные условия, т. е. $x(0), y(0), x'(0), y'(0)$.

3. Обычными алгебраическими методами решаем систему уравнений для $\mathcal{L}\{y\}$ и $\mathcal{L}\{x\}$.

4. Находим x и y, используя по необходимости разложение на простейшие дроби, и берем обратное преобразование Лапласа от каждого члена разложения.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} + x = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} - y + 4e^t = 0,$$

если дано, что при $t = 0$ выполняется $x = 0$ и $y = 0$, используя описанную выше процедуру.

1. $$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{1\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{y\} + 4\mathcal{L}\{e\}t = 0. \tag{2}$$

Согласно уравнению (3) со стр. 496 и **Табл. 13.1** со стр. 494 уравнение (1) приобретает вид

$$[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] + \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s}. \tag{1'}$$

Уравнение (2) приобретает вид

$$[s\mathcal{L}\{x\}-x(0)]-\mathcal{L}\{y\} = -\frac{4}{s-1}. \tag{2'}$$

2. $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$, следовательно, уравнение (1′) приобретает вид

$$s\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s} \tag{1''}$$

и уравнение (2′) приобретает вид $s\mathcal{L}\{x\}-\mathcal{L}\{y\} = \frac{4}{s-1}$, или

$$-\mathcal{L}\{y\}+s\mathcal{L}\{x\} = \frac{4}{s-1}. \tag{2''}$$

3. Уравнение (1″) оставляем неизменным, а уравнение (2″) умножаем на s:

$$s\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s}, \tag{3}$$

$$-s\mathcal{L}\{y\}+s^2\mathcal{L}\{x\} = -\frac{4s}{s-1}. \tag{4}$$

Складываем уравнения (3) и (4):

$$(s^2+1)\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s}-\frac{4s}{s-1} = \frac{(s-1)-s(4s)}{s(s-1)} = \frac{-4s^2+s-1}{s(s-1)},$$

откуда $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{-4s^2+s-1}{s(s-1)(s^2+1)}$.

Применим разложение на простейшие дроби:

$$\frac{-4s^2+s-1}{s(s-1)(s^2+1)} \equiv \frac{A}{s}+\frac{B}{(s-1)}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)} =$$

$$= \frac{A(s-1)(s^2+1)+Bs(s^2+1)+(Cs+D)(s-1)}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

Следовательно,

$-4s^2+s-1 = A(s-1)(s^2+1)+Bs(s^2+1)+(Cs+D)s(s-1)$.

При $s = 0$ имеем $-1 = -A$, следовательно, $\boldsymbol{A = 1}$.

При $s = 1$ имеем $-4 = 2B$, следовательно, $\boldsymbol{B = -2}$.

Приравниваем коэффициенты при s^3:

$0 = A + B + C$, следовательно, $\boldsymbol{C = 1}$ (так как $A = 1$ и $B = -2$).

Приравнивая коэффициенты при s^2, получаем $-4 = -A + D - C$, следовательно, $\boldsymbol{D = -2}$ (так как $A = 1$ и $C = 1$).

Итак, $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{-4s^2 + s - 1}{s(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{(s-1)} + \dfrac{s-2}{(s^2+1)}$.

4. Следовательно, $x = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{(s-1)} + \dfrac{s-2}{(s^2+2)}\right\} =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{2}{(s-1)} + \frac{s}{(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+1)}\right\}.$$

То есть $\boldsymbol{x = 1 - 2e^t + \cos t - 2\sin t}$, согласно **Табл. 13.1** со стр. 494.

Второе уравнение исходной системы имеет вид $\dfrac{dx}{dt} - y + 4e^t = 0$, откуда

$$y = \frac{dx}{dt} + 4e^t = \frac{d}{dt}((1 - 2e^t + \cos t - 2\sin t)) + 4e^t =$$
$$= -2e^t - \sin t - 2\cos t + 4e^t,$$

т. е.

$$\boldsymbol{y = 2e^t - \sin t - 2\cos t}.$$

Или же, чтобы найти y, можно вернуться к уравнениям (1″) и (2″).

Глава 14

Ряды Фурье

14.1. РЯДЫ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π

14.1.1. Введение

Ряды Фурье позволяют изучать периодические функции, разлагая их на компоненты. Переменные токи и напряжения, смещение, скорость и ускорение кривошипно-ползунных механизмов и акустические волны — это типичные практические примеры применения периодических функций в инженерных расчетах.

14.1.2. Периодические функции

Говорят, что функция $f(x)$ *периодическая,* если $f(x + T) = f(x)$ для всех значений x, где T — некоторое положительное число. T — это интервал между двумя последовательными повторами, он называется *периодом* функции $f(x)$. Например, $y = \sin x$ есть периодическая по x функция с периодом 2π, поскольку $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi)$ и так далее. В общем, если $y = \sin \omega t$, то период сигнала равен $2\pi/\omega$. Показанная на **Рис. 14.1** функция является периодической с периодом 2π и задается уравнением

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \,. \end{cases}$$

Если на графике функции нет скачков и разрывов, то она называется *непрерывной функцией*; примером могут служить графики синуса и косинуса. Однако другие графики могут иметь конечные скачки в точке, или точках, интервала. Прямоугольный сигнал на **Рис. 14.1** имеет конечные разрывы в точках $x = \pi$, 2π, 3π и так далее. Важное преимущество рядов Фурье состоит в том, что их можно с равным успехом применять как к разрывным, так и к непрерывным функциям.

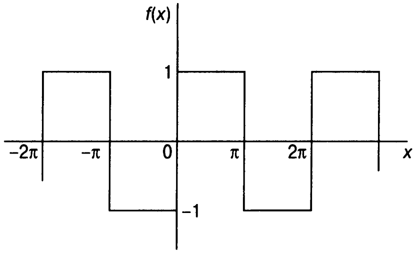


Рис. 14.1

14.1.3. Ряды Фурье

Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \le x \le \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots +$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ — действительные константы, т. е.

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)} \qquad (1)$$

где для диапазона от $-\pi$ до π

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Константы a_0, a_n и b_n называются *коэффициентами Фурье*, и если их можно найти, то ряд (1) называется *рядом Фурье*, соответствующим функции $f(x)$.

Другой способ записи ряда — использование соотношения $a \cos x + b \sin x = c \sin (x + \alpha)$, представленного в разд. 3.8, т. е.

$$f(x) = a_0 + c_1 \sin(x + \alpha_1) + c_2 \sin(2x + \alpha_2) + ... + c_n \sin(nx + \alpha_n),$$

где α_0 — константа, $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, ..., $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — амплитуды различных компонент, а фазовый угол равен $\alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}$.

Для ряда (1) член $(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$ или $c_1 \sin(x + \alpha_1)$ называется первой или *основной гармоникой*, член $(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)$ или $c_2 \sin(2x + \alpha_2)$ называется *второй гармоникой* и так далее.

Для точного представления сложного сигнала обычно требуется бесконечное количество членов. Однако во многих практических задачах достаточно рассмотреть только несколько первых членов.

Пример. Получить ряд Фурье для периодической функции $f(x)$, заданной выражением

$$f(x) = \begin{cases} -k \text{ при } -\pi < x < 0, \\ +k \text{ при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(Функция является периодической за пределами заданного диапазона с периодом 2π.)

Этот прямоугольный сигнал показан на **Рис. 14.2**. Поскольку $f(x)$ для двух половин диапазона задается двумя различными выражениями, интегрирование сигнала проводим для двух интервалов — сначала от $-\pi$ до 0, затем от 0 до π.

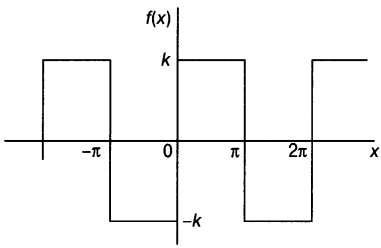


Рис. 14.2

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} -k dx + \int_{0}^{\pi} k dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{ [-kx]_{-\pi}^{0} + [kx]_0^{\pi} \} = 0 .$$

(В действительности a_0 — это ***среднее значение*** функции за полный период 2π, и его равенство нулю очевидно из **Рис. 14.2**.)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -k\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-k\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{k\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right\} = 0.$$

Следовательно, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ все равны нулю (поскольку $\sin 0 = \sin(-n\pi) = \sin n\pi = 0$), и поэтому в ряду Фурье нет членов с косинусами.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -k\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{k\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-k\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right\}.$$

Если n нечетное,

$$b_n = \frac{k}{\pi}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right] + \left[-\left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right\} = \frac{k}{\pi}\left\{\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\right\} = \frac{4k}{n\pi}.$$

Следовательно, $b_1 = \dfrac{4k}{\pi}$, $b_3 = \dfrac{4k}{3\pi}$, $b_5 = \dfrac{4k}{5\pi}$ и так далее.

Если n четное, $b_n = \dfrac{k}{\pi}\left\{\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right] + \left[-\dfrac{1}{n} - \left(-\dfrac{1}{n}\right)\right]\right\} = 0.$

Следовательно, согласно уравнению (1), ряд Фурье для функции на **Рис. 14.2** есть

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(0 + b_n\sin nx),$$

т. е.

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\sin x + \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + \frac{4k}{5\pi}\sin 5x + \ldots,$$

или

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)}.$$

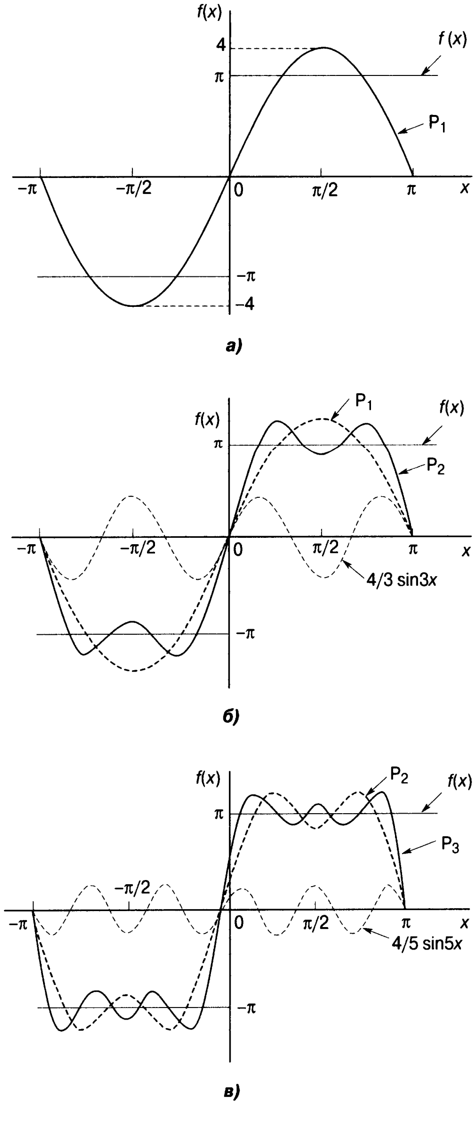

f(x)
4
π
f (x)
P1
−π
−π/2
0
π/2
π
x
−π
−4
а)
P1
f(x)
f(x)
π
P2
−π
−π/2
0
π/2
π
x
4/3 sin3x
−π
б)
f(x)
P2
f(x)
π
P3
−π/2
−π
0
π/2
π
x
4/5 sin5x
−π
в)

Рис. 14.3

Если в рассмотренном выше ряду Фурье $k = \pi$, то $f(x) = 4\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$. Выражение $4\sin x$ называется первой частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$, $\left(4\sin x + \frac{4}{3}\sin 3x\right)$ — второй частичной суммой ряда Фурье, $\left(4\sin x + \frac{4}{3}\sin 3x + \frac{4}{5}\sin 5x\right)$ — третьей частичной суммой ряда Фурье и так далее.

Пусть $P_1 = 4\sin x$, $P_2 = \left(4\sin x + \frac{4}{3}\sin 3x\right)$,

$$P_3 = \left(4\sin x + \frac{4}{3}\sin 3x + \frac{4}{5}\sin 5x\right).$$

Графики P_1, P_2 и P_3 построены по таблицам значений, а их суммы показаны на **Рис. 14.3а...в**, откуда видно, что ряд сходится, т. е. при увеличении количества рассматриваемых частичных сумм он стремится к конечному пределу, и в пределе получается сумма $f(x) = \pi$. Даже при учете только трех частичных сумм форма графика приближается к прямоугольной, которую представляет ряд Фурье.

14.2. РЯДЫ ФУРЬЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ДИАПАЗОНЕ 2π

14.2.1. Разложение непериодических функций

Если функция $f(x)$ непериодическая, значит, она не может быть разложена в *ряд Фурье* для *всех* значений x. Однако можно определить ряд Фурье, представляющий функцию в любом диапазоне шириной 2π.

Если задана непериодическая функция, можно составить новую функцию, выбирая значения $f(x)$ в определенном диапазоне и повторяя их вне этого диапазона с интервалом 2π. Поскольку новая функция является периодической с периодом 2π, ее можно разложить в ряд Фурье для всех значений x. Например, функция $f(x) = x$ не является периодической. Однако, если необходимо получить для этой функции ряд Фурье, тогда вне этого диапазона строится периодическая функция с периодом 2π, показанная на **Рис. 14.4** штриховыми линиями.

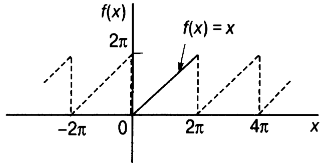


Рис. 14.4

Для непериодических функций, таких как $f(x) = x$, сумма ряда Фурье равна значению $f(x)$ во всех точках заданного диапазона, но она не равна $f(x)$ для точек вне диапазона.

Для нахождения ряда Фурье непериодической функции в диапазоне 2π используется та же формула коэффициентов Фурье, что и в разд. 14.1.

Пример. Найти ряд Фурье, представляющий функцию $f(x) = 2x$ в диапазоне от $-\pi$ до $+\pi$.

Функция $f(x) = 2x$ не является периодической. На **Рис. 14.5** показан график этой функции в диапазоне от $-\pi$ до π, вне этого диапазона график восстановлен таким образом, чтобы его период составлял 2π (штриховые линии), итоговая форма графика — пилообразная.

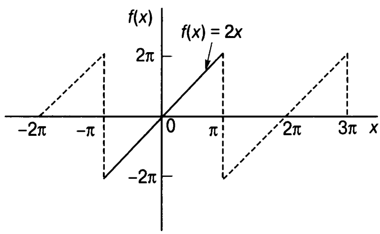


Рис. 14.5

Для ряда Фурье: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Из разд. 14.1:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x dx = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n} dx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2}\right) - \left(0 + \frac{\cos n(-\pi)}{n^2}\right)\right] = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} - \int\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right) - \left(\frac{-(-\pi)\cos n(-\pi)}{n} + \frac{\sin n(-\pi)}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}\right] = \frac{-4}{n}\cos n\pi\,.$$

Если n — нечетное, то $b_n = \frac{4}{n}$. Таким образом, $b_1 = 4$, $b_3 = \frac{4}{3}$, $b_5 = \frac{4}{5}$ и так далее.

Если n — четное, то $b_n = \frac{-4}{n}$. Таким образом, $b_2 = -\frac{4}{2}$, $b_4 = -\frac{4}{4}$, $b_6 = -\frac{4}{6}$ и так далее. Итак,

$$f(x) = 2x = 4\sin x - \frac{4}{2}\sin 2x + \frac{4}{3}\sin 3x - \frac{4}{4}\sin 4x +$$

$$+ \frac{4}{5}\sin 5x - \frac{4}{6}\sin 6x + \ldots\,.$$

То есть

$$\mathbf{2x = 4\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \right.}$$

$$\mathbf{\left. + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \ldots\right)}$$

для значений $f(x)$ между $-\pi$ и π. Для значений $f(x)$ вне диапазона от $-\pi$ до $+\pi$ сумма ряда не равна $f(x)$.

14.3. РЯДЫ ФУРЬЕ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУПЕРИОДЕ

14.3.1. Четные и нечетные функции

Говорят, функция $y = f(x)$ *четная*, если $f(-x) = f(x)$ для всех значений x. Графики четных функций всегда ***симметричны относительно оси y*** (т. е. являются зеркально отраженными). Два примера четных функций, $y = x^2$ и $y = \cos x$, показаны на **Рис. 4.50** со стр. 230.

Говорят, что функция $y = f(x)$ *нечетная*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех значений x. Графики нечетных функций всегда ***симметричны относительно начала координат***. Два примера нечетных функций: $y = x^3$ и $y = \sin x$, они показаны на **Рис. 4.51** со стр. 230.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

14.3.2. Разложение в ряд Фурье по косинусам

Ряд Фурье *четной периодической* функции $f(x)$ с периодом 2π содержит только члены с косинусами (т. е. не содержит членов с синусами) и может включать постоянный член. Следовательно,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ (в силу симметрии)},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Пример. Найти преобразование Фурье для периодической функции с периодом 2π, заданной выражением

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ 2 \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -2 \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Прямоугольный сигнал на **Рис. 14.6** — это четная функция, поскольку она симметрична относительно оси $f(x)$.

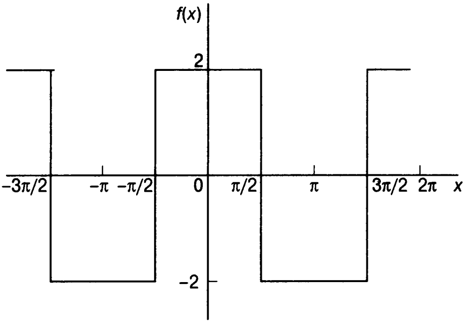


Рис. 14.6

Следовательно, из сказанного выше $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (т. е. ряд не содержит членов с синусами).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} 2dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -2dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\{[2x]_0^{\pi/2} + [-2x]_{\pi/2}^{\pi}\} = \frac{1}{\pi}[(\pi) + [(-2\pi) - (-\pi)]] = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} 2\cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -2\cos nx dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{-\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\left(\frac{\sin(\pi/2)n}{n} - 0\right) + \left(0 - \frac{-\sin(\pi/2)n}{n}\right)\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin(\pi/2)n}{n}\right) = \frac{8}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Если n четное, $a_n = 0$. Если n нечетное, $a_n = \dfrac{8}{\pi n}$ при $n = 1, 5, 9, \ldots$ и $a_n = \dfrac{-8}{\pi n}$ при $n = 3, 7, 11, \ldots$.

Следовательно, $a_1 = \dfrac{8}{\pi}$, $a_3 = \dfrac{-8}{3\pi}$, $a_5 = \dfrac{8}{5\pi}$ и так далее .

Следовательно, ряд Фурье сигнала с **Рис. 14.6** имеет вид

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots\right).$$

14.3.3. Разложение в ряд Фурье по синусам

Ряд Фурье нечетной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π содержит только члены с синусами (т. е. не содержит членов с косинусами).

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$.

Пример. Получить ряд Фурье для прямоугольного сигнала с **Рис. 14.7**.

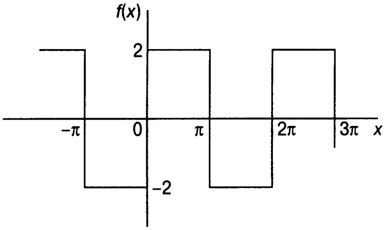


Рис. 14.7

Прямоугольный сигнал — это нечетная функция, поскольку она симметрична относительно начала координат. Следовательно, согласно сказанному выше, ее ряд Фурье имеет вид $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Функция задается как

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ \ \ 2 \text{ при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin nx dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{-\cos n\pi}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{4}{\pi n}(1 - \cos n\pi).$$

Если n четное, $b_n = 0$. Если n нечетное, $b_n = \frac{4}{\pi n}(1-(-1)) = \frac{8}{\pi n}$.

Следовательно, $b_1 = \frac{8}{\pi}$, $b_3 = \frac{8}{3\pi}$, $b_5 = \frac{8}{5\pi}$ и так далее.

Значит, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right).$$

14.3.4. Ряд Фурье на полупериоде

Если функция определена для диапазона, скажем, от 0 до π, а не от 0 до 2π, ее можно разложить в ряд только по синусам или только по косинусам. Полученный ряд Фурье называется *рядом Фурье на полупериоде*.

- Если требуется получить ***разложение Фурье на полупериоде по косинусам*** функции $f(x)$ в диапазоне от 0 до π, то необходимо составить ***четную*** периодическую функцию. На **Рис. 14.8** показана функция $f(x) = x$, построенная на интервале от $x = 0$ до $x = \pi$. Поскольку четная функция симметрична относительно оси $f(x)$, проводим линию AB, как показано на рисунке. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученная треугольная форма является периодической с периодом 2π, то итоговый график имеет вид, показанный на **Рис. 14.8**. Поскольку требуется получить разложение Фурье по косинусам, как и ранее, вычисляем коэффициенты Фурье a_0 и a_n:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx ,$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$ и $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$.

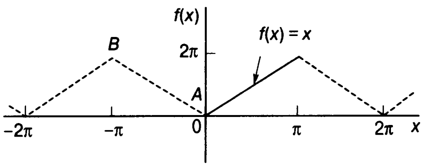


Рис. 14.8

Пример. Найти разложение Фурье по косинусам на полупериоде для функции $f(x) = x$ в интервале $0 \le x \le \pi$.

При $f(x) = x$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2}\right) - \left(0 + \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) .$$

Если n четное, $a_n = 0$.

Если n нечетное, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}(-1-1) = \frac{-4}{\pi n^2}$.

Следовательно, $a_1 = \frac{-4}{\pi}$, $a_3 = \frac{-4}{\pi 3^2}$, $a_5 = \frac{-4}{\pi 5^2}$ и так далее.

Следовательно, разложение Фурье по косинусам для полупериода имеет вид

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

- Если требуется получить ***разложение Фурье на полупериоде по синусам*** функции $f(x)$ в диапазоне от 0 до π, то необходимо составить ***нечетную*** периодическую функцию. На **Рис. 14.9** показана функция $f(x) = x$, построенная на интервале от $x = 0$ до $x = \pi$. Поскольку нечетная функция симметрична относительно начала координат, строим линию CD, как показано на рисунке. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученный пилообразный сигнал является периодическим с периодом 2π, то итоговый график имеет вид, показанный на **Рис. 14.9**. Поскольку требуется получить разложение Фурье на полупериоде по синусам, как и ранее, вычисляем коэффициент Фурье b_n:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

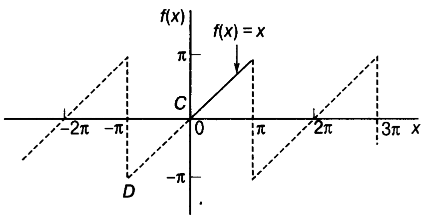


Рис. 14.9

Пример. Найти разложение Фурье по синусам на полупериоде функции $f(x) = x$ в интервале $0 \le x \le \pi$.

При $f(x) = x$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x dx =$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2} - (0+0)\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi .$$

Если n нечетное, то $b_n = \frac{2}{n}$.

Следовательно, $b_1 = \frac{2}{1}$, $b_3 = \frac{2}{3}$, $b_5 = \frac{2}{5}$ и так далее.

Если n четное, то $b_n = -\frac{2}{n}$.

Следовательно, $b_2 = -\frac{2}{2}$, $b_4 = -\frac{2}{4}$, $b_6 = -\frac{2}{6}$ и так далее.

Итак, разложение в ряд Фурье по синусам для полупериода имеет вид

$$f(x) = x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \ldots\right).$$

14.4. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

14.4.1. Разложение периодической функции с периодом L

Периодическая функция $f(x)$ повторяется при увеличении x на L, т. е. $f(x + L) = f(x)$. Переход от рассмотренных ранее функций с периодом 2π к функциям с периодом L довольно прост, поскольку его можно осуществить с помощью замены переменной.

Чтобы найти ряд Фурье функции $f(x)$ в диапазоне $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$, введем новую переменную u таким образом, чтобы функция $f(x)$ имела период 2π относительно u. Если $u = \frac{2\pi x}{L}$, то $x = -\frac{L}{2}$ при $u = -\pi$ и $x = \frac{L}{2}$ при $u = +\pi$. Также пусть $f(x) = f\left(\frac{Lu}{2\pi}\right) = F(u)$. Ряд Фурье $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nu + b_n\sin nu), \text{ где } a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)du,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos nu\,du \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Fu\sin nu\,du\,.$$

Однако чаще приведенную выше формулу приводят к зависимости от x. Поскольку $u = \frac{2\pi x}{L}$, значит, $du = \frac{2\pi}{L}dx$, а пределы интегрирования — от $-\frac{L}{2}$ до $+\frac{L}{2}$ вместо от $-\pi$ до π. Следовательно, ряд Фурье для зависимости от x имеет вид

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]}$$

где в диапазоне от $-\frac{L}{2}$ до $+\frac{L}{2}$:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

и

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

(Пределы интегрирования могут быть заменены на любой интервал длиной L, например от 0 до L.)

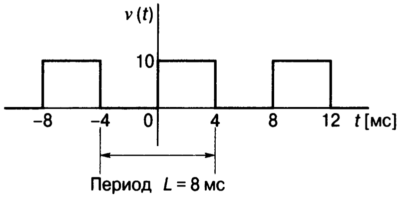


Рис. 14.10

Пример. Если напряжение генератора прямоугольных импульсов (**Рис. 14.10**) имеет вид $v(t) = \begin{cases} 0, & -4 < t < 0 \\ 10, & 0 < t < 4 \end{cases}$ и период 8 мс, то его ряд Фурье находим следующим образом:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)\right],$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} v(t)dt = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} v(t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\int_{-4}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} 10dt\right\} = \frac{1}{8}[10t]_0^4 = 5,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} v(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt = \frac{2}{8}\int_{-4}^{4} v(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-4}^{0} 0\cos\left(\frac{\pi nt}{4}\right)dt + \int_{0}^{4} 10\cos\left(\frac{\pi nt}{4}\right)dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{10\sin\left(\frac{\pi nt}{4}\right)}{\left(\frac{\pi n}{4}\right)}\right]_0^4 = \frac{10}{\pi n}[\sin\pi n - \sin 0] = 0 \text{ для } n = 1, 2, 3\ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} v(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt = \frac{2}{8}\int_{-4}^{4} v(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{8}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-4}^{0} 0\sin\left(\frac{\pi nt}{4}\right)dt + \int_{0}^{4} 10\sin\left(\frac{\pi nt}{4}\right)dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-10\cos\left(\frac{\pi nt}{4}\right)}{\left(\frac{\pi n}{4}\right)}\right]_0^4 = \frac{-10}{\pi n}[\cos\pi n - \cos 0].$$

Если n четное, то $b_n = 0$, $b_1 = \frac{-10}{\pi}(-1-1) = \frac{20}{\pi}$, $b_3 = \frac{-10}{3\pi}(-1-1) = \frac{20}{3\pi}$, $b_5 = \frac{20}{5\pi}$ и так далее.

Таким образом, ряд Фурье функции $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi t}{4}\right) + \ldots\right].$$

14.4.2. Ряд Фурье на полупериоде для функций, заданных в интервале L

Для подстановки $u = \frac{\pi x}{L}$ интервал от $x = 0$ до $x = L$ соответствует интервалу от $u = 0$ до $u = \pi$. Следовательно, функцию можно разложить в ряд только по косинусам или только по синусам, т. е. в *ряд Фурье на полупериоде.*

Разложение по косинусам в диапазоне от 0 до L имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \quad \text{и} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Пример. Найти разложение Фурье по косинусам на полупериоде функции $f(x) = x$ в интервале $0 \le x \le 2$.

Разложение Фурье на полупериоде по косинусам означает четную функцию. График $f(x) = x$ в интервале от 0 до 2 показан на **Рис. 14.11** и продолжен за пределами рассмотренного интервала таким образом, чтобы быть симметричным относительно оси $f(x)$, как показано штриховыми линиями.

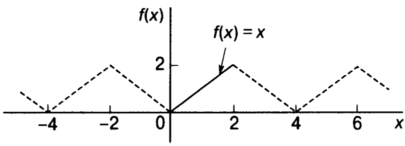


Рис. 14.11

Для разложения по косинусам на полупериоде

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right]_0^2 = \left[\left(\frac{2\sin n\pi}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{\cos n\pi}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right) - \left(0 + \frac{\cos 0}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\cos n\pi}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right] = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2 (\cos n\pi - 1).$$

Если n четное, то $a_n = 0$,

$$a_1 = \frac{-8}{\pi^2},\ a_3 = \frac{-8}{\pi^2 3^2},\ a_5 = \frac{-8}{\pi^2 5^2}\ \text{и так далее.}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье по косинусам на полупериоде функции $f(x)$ в интервале от 0 до 2 имеет вид

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5^2}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots\right].$$

Разложение в ряд Фурье по синусам в диапазоне от 0 до L — это

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \text{где}\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

14.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

14.5.1. Введение

Многие встречающиеся на практике колебания могут быть представлены в виде простых математических выражений, и при использовании рядов Фурье величина их гармоник определяется способами, рассмотренными в разд. 14.1...14.4. Для колебаний, не относящихся к этой категории, анализ можно проводить численными методами.

Гармонический анализ — это процесс разложения периодической несинусоидальной величины в ряд синусоидальных составляющих гармоник с возрастающими частотами.

14.5.2. Гармонический анализ информации, представленной в табличной или графической форме

Все коэффициенты Фурье a_0, a_n и b_n, рассмотренные в разд. 14.1...14.4, требуют интегрирования функций:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

т. е. равно среднему значению $f(x)$ в диапазоне от $-\pi$ до π или от 0 до 2π;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx,$$

т. е. равно удвоенному среднему значению $f(x)\cos nx\,dx$ в диапазоне от 0 до 2π;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx,$$

т. е. равно удвоенному среднему значению $f(x)\sin nx\,dx$ в диапазоне от 0 до 2π.

Однако неправильные колебания обычно нельзя описать математическими выражениями, поэтому коэффициенты Фурье не могут быть найдены аналитически. В таких случаях для определения коэффициентов Фурье можно использовать приближенные методы, такие как *правило трапеций.*

Среди анализируемых колебаний наиболее широкое практическое применение имеют периодические. Пусть период сигнала равен 2π и разделен на p равных частей, как показано на **Рис. 14.12**. Таким образом, ширина каждого интервала равна $\frac{2\pi}{p}$. Обозначим ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_p$ (отметим, что $y_0 = y_p$).

Правило трапеций гласит:

$$\text{Площадь} = \begin{pmatrix}\text{ширина}\\\text{интервала}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\text{первая}\\+\text{ последняя}\\\text{ордината}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{сумма}\\\text{остальных}\\\text{ординат}\end{pmatrix}\right]\approx$$

$$\approx\frac{2\pi}{p}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_p)+y_1+y_2+y_3+\ldots\right].$$

Поскольку $y_0 = y_p$, то $\frac{1}{2}(y_0+y_p)\approx y_0 = y_p$.

Следовательно, площадь

$$S\approx\frac{2\pi}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k .$$

$$\text{Среднее значение} = \frac{\text{площадь}}{\text{длина основания}}\approx\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{p}\right)\sum_{k=1}^{p} y_k\approx\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k .$$

Однако a_0 равно среднему значению $f(x)$ в интервале от 0 до 2π. Поэтому

$$a_0\approx\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k . \qquad (1)$$

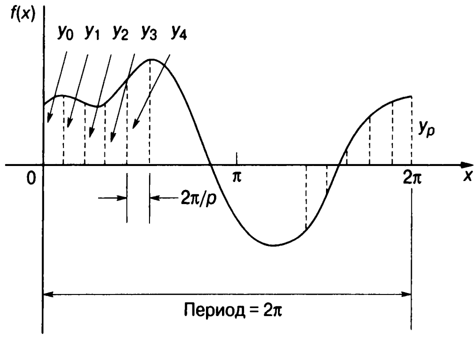


Рис. 14.12

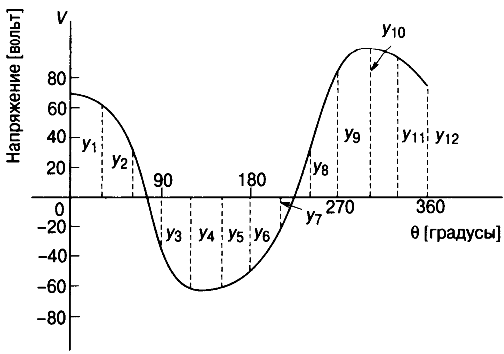


Рис. 14.13

Аналогично a_n равно удвоенному среднему значению функции $f(x)\cos nx$ в диапазоне от 0 до 2π. Поэтому

$$a_n \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos nx_k, \tag{2}$$

и b_n равно удвоенному среднему значению функции $f(x)\sin nx$ в диапазоне от 0 до 2π, т. е.

$$b_n \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin nx_k. \tag{3}$$

Пример. График зависимости напряжения V от θ показан на **Рис. 14.13**. Значения координат $y_1, y_2, y_3, \ldots$ равны 62, 35, −38, −64, −63, −52, −28, 24, 80, 96, 90 и 70 соответственно, всего 12 равных интервалов шириной 30°. (Если используется большее количество интервалов, полученные результаты имеют более высокую степень точности.)

Данные приведены в **Табл. 14.1**.

Из уравнения (1) следует, что $a_0 \approx \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k = \frac{1}{12}(212) \approx 17.67$

(поскольку $p = 12$).

Из уравнения (2) следует, что $a_n \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos nx_k$, следовательно,

$a_1 \approx \frac{2}{12}(417.94) \approx 69.66$, $a_2 \approx \frac{2}{12}(-39) = -6.50$ и $a_3 \approx \frac{2}{12}(-49) \approx -8.17$.

Из уравнения (3) следует, что $b_n \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin nx_k$, следовательно,

$b_1 \approx \frac{2}{12}(-278.53) \approx -46.42$, $b_2 \approx \frac{2}{12}(29.43) \approx 4.91$ и $b_3 \approx \frac{2}{12}(55) \approx 9.17$.

Подставляем эти значения в ряд Фурье:

$$f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

В итоге получаем

$$\boldsymbol{V = 17.67 + 69.66 \cos\theta - 6.50 \cos 2\theta - 8.17 \cos 3\theta + \ldots - 46.42 \sin\theta + 4.91 \sin 2\theta + 9.17 \sin 3\theta + \ldots} \quad (4)$$

Отметим, что в уравнении (4) выражение $(-46.42 \sin\theta + 69.66 \cos\theta)$ представляет собой первую гармонику, $(4.91 \sin 2\theta - 6.50 \cos 2\theta)$ — вторую гармонику, $(9.17 \sin 3\theta - 8.17 \cos 3\theta)$ — третью гармонику.

В разд. 3.8 показано, что $a \sin \omega t + b \cos \omega t = R \sin(\omega t + \alpha)$,

где $a = R\cos\alpha$, $b = R\sin\alpha$, $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Таблица 14.1

Ординаты	θ	V	cos θ	V cos θ	sin θ	V sin θ	cos 2θ	V cos 2θ	sin 2θ	V sin 2θ	cos 3θ	V cos 3θ	sin 3θ	V sin 3θ
y_1	30	62	0.866	53.69	0.5	31	0.5	31	0.866	53.69	0	0	1	62
y_2	60	35	0.5	17.5	0.866	30.31	–0.5	–17.5	0.866	30.31	–1	–35	0	0
y_3	90	–38	0	0	1	–38	–1	38	0	0	0	0	–1	38
y_4	120	–64	–0.5	32	0.866	–55.42	–0.5	32	–0.866	55.42	1	–64	0	0
y_5	150	–63	–0.866	54.56	0.5	–31.5	0.5	–31.5	–0.866	54.56	0	0	1	–63
y_6	180	–52	–1	52	0	0	1	–52	0	0	–1	52	0	0
y_7	210	–28	–0.866	24.25	–0.5	14	0.5	–14	0.866	–24.25	0	0	–1	28
y_8	240	24	–0.5	–12	–0.866	–20.78	–0.5	–12	0.866	20.78	1	24	0	0
y_9	270	80	0	0	–1	–80	–1	–80	0	0	0	0	1	80
y_{10}	300	96	0.5	48	–0.866	–83.14	–0.5	–48	–0.866	–83.14	–1	–96	0	0
y_{11}	330	90	0.866	77.94	–0.5	–45	0.5	45	–0.866	–77.94	0	0	–1	–90
y_{12}	360	70	1	70	0	0	1	70	0	0	1	70	0	0
	$\sum_{k=1}^{12} y_k = 212$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \cos\theta_k = 417.94$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin\theta_k = -278.53$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \cos 2\theta_k = -39$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin 2\theta_k = 29.43$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \cos 3\theta_k = -49$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin 3\theta_k = 55$	

Поэтому выражение (4) равносильно

$$V = \mathbf{17.67 + 83.71\,sin\,(\theta + 2.16) + 8.15\,sin\,(2\theta - 0.92) +}$$
$$\mathbf{+\ 12.28\,sin\,(3\theta - 0.73)}\ \text{вольт}.$$

Данная форма записи обычно используется для сложных колебаний.

14.5.3. Рассуждения о сложных колебаниях

Иногда возможно предсказать гармоническое содержимое колебания рассмотрением его отдельных характеристик.

1. Если периодическое колебание таково, что площадь над горизонтальной осью равна площади под этой осью, то среднее его значение равно нулю. Следовательно, $a_0 = 0$ (см. **Рис. 14.14а**).

2. *Четная функция* симметрична относительно вертикальной оси и не содержит ***членов с синусами*** (см. **Рис. 14.14б**).

3. *Нечетная функция* симметрична относительно начала координат и не содержит ***членов с косинусами*** (см. **Рис. 14.14в**).

4. $f(x) = f(x + \pi)$ представляет функцию, повторяющуюся на периоде π, она представлена ***только четными гармониками*** (см. **Рис. 14.14г**).

5. $f(x) = -f(x + \pi)$ представляет функцию, для которой положительный и отрицательный периоды идентичны по форме, она представлена ***только нечетными гармониками*** (см. **Рис. 14.14д**).

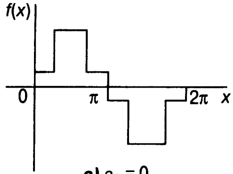
Пример. На **Рис. 14.15** показан график переменного тока i ампер. Проведен анализ сигнала и получены его составляющие до пятой гармоники с интервалами 30° , также из **Рис. 14.15** получены следующие характеристики:

- Среднее значение равно нулю, поскольку площадь над осью θ равна площади под этой осью. Таким образом, постоянный член, т. е. компонента постоянного тока $a_0 = 0$.
- Поскольку график симметричен относительно начала координат, то функция i нечетная; следовательно, ряд Фурье данной функции не содержит членов с косинусами.
- График имеет форму $f(\theta) = -f(\theta + \pi)$, значит, присутствуют только нечетные гармоники.

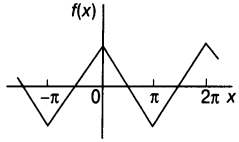
Таким образом, исследование характеристик графика позволило избавиться от ненужных вычислений, и в данном случае в ряду Фурье представлены только нечетные члены с синусами, т. е.

$$i = b_1 \sin\theta + b_3 \sin 3\theta + b_5 \sin 5\theta + \ldots .$$

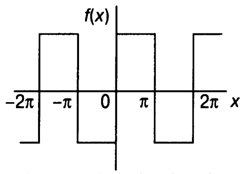
Проформа, аналогичная **Табл. 14.1**, но без столбцов для членов с косинусами и четных членов с синусами, приведена в



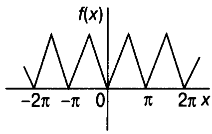
а) $a_0 = 0$



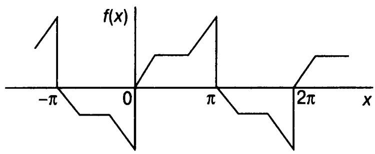
б) Не содержит членов с синусами



в) Не содержит членов с косинусами



г) Содержит только четные гармоники



д) Содержит только нечетные гармоники

Рис. 14.14

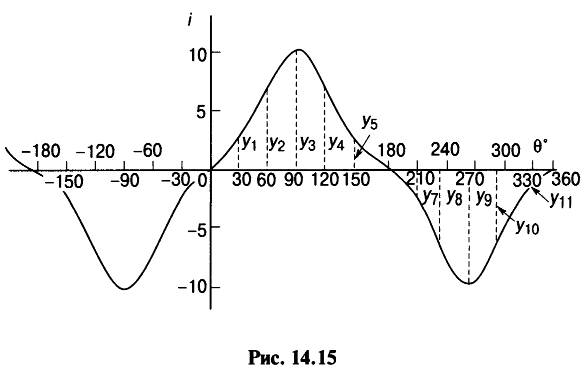


Рис. 14.15

Табл. 14.2 и включает пять гармоник, откуда можно определить коэффициенты Фурье b_1, b_3 и b_5. Выбраны 12 координат, обозначенные $y_1, y_2, y_3, ..., y_{12}$, как показано на **Рис. 14.15**.

Таблица 14.2

Ординаты	θ	i	sin θ	i sin θ	sin 3θ	i sin 3θ	sin 5θ	i sin 5θ
y_1	30	2	0.5	1	1	2	0.5	1
y_2	60	7	0.866	6.06	0	0	−0.866	−6.06
y_3	90	10	1	10	−1	−10	1	10
y_4	120	7	0.866	6.06	0	0	−0.866	−6.06
y_5	150	2	0.5	1	1	2	0.5	1
y_6	180	0	0	0	0	0	0	0
y_7	210	−2	−0.5	1	−1	2	−0.5	1
y_8	240	−7	−0.866	6.06	0	0	0.866	−6.06
y_9	270	−10	−1	10	1	−10	−1	10
y_{10}	300	−7	−0.866	6.06	0	0	0.866	−6.06
y_{11}	330	−2	−0.5	1	−1	2	−0.5	1
y_{12}	360	0	0	0	0	0	0	0
			$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin\theta_k = 48.24$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin 3\theta_k = -12$		$\sum_{k=1}^{12} y_k \sin 5\theta_k = -0.24$	

Из уравнения (3) следует, что $b_n \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} i_k \sin n\theta_k$, где $p = 12$.

Значит, $b_1 \approx \frac{2}{12}(48.24) = 8.04$, $b_3 \approx \frac{2}{12}(-12) = -2.00$

и $b_5 \approx \frac{2}{12}(-0.24) = -0.04$.

Итак, ряд Фурье для тока i имеет вид

$$\boldsymbol{i = 8.04 \sin\theta - 2.00 \sin 3\theta - 0.04 \sin 5\theta.}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р

Х

Ц

Ч

Ш

Э

Бёрд Джон

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Карманный справочник

Главный редактор *В. М. Халикеев*
Ответственный редактор *И. А. Корабельникова*
Научный редактор *С. В. Чудов*
Технический редактор *Н. В. Тищенко*
График *А. Н. Клочков*
Верстальщик *И. С. Кайнова*
Корректор *Г. Б. Абудеева*

Подписано в печать 07.12.2007. Формат 84x108/32.
Бумага типографская № 2. Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.
Объем 17,0 п. л. Усл. печ. л. 28,56. Тираж 2000 экз.
Изд. код РВ8. Заказ 3392

Издательский дом «Додэка-XXI»
ОКП 95 3000
105318 Москва, а/я 70
Тел./факс: (095) 366-24-29, 366-09-22
E-mail: books@dodeca.ru; red@dodeca.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Типография «Новости»
105005 Москва, ул. Ф. Энгельса, 46

Книги Издательского дома «Додэка-XXI»

Бриндли К., Карр Дж.

Карманный справочник инженера электронной техники

3-е издание

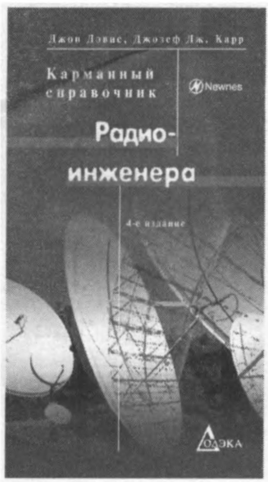
Издательский дом «Додэка-XXI»
Дата выпуска: 2007 г.
Объем: 480 с.
ISBN: 978-5-94120-114-3
Формат: 84x108/32

В справочнике собраны сведения об основах современной электронной техники. Достаточно полно представлена элементная база, рассмотрены основы построения практически всех возможных узлов, образующих электронные схемы, приведены данные о функциональных назначениях и цоколевке интегральных схем популярных серий. Не обойдены вниманием основы оптоэлектроники — свето- и фотоэлектрические приборы, лазеры и оптические волноводы. Немалую часть книги занимает разнообразный справочный материал — физические величины, их единицы и коэффициенты преобразования этих единиц из одной системы в другую, аббревиатуры терминов, используемых в электронике, данные о радиотехнических кабелях и разъемах, выпускаемых промышленностью, и много других полезных сведений. Книга содержит толковый и англо-русский словари, содержащие около 1400 терминов, используемых в электронике.

Справочник будет полезен разработчикам электронной аппаратуры, студентам соответствующих специальностей, а также всем, интересующимся основами современной электроники.

Книги Издательского дома «Додэка-XXI»

Дэвис Дж., Карр Дж. Дж.



Карманный справочник радиоинженера
4-е издание

Издательский дом «Додэка-XXI»
Дата выпуска: 2007 г.
Объем: 544 с.
ISBN: 978-5-94120-160-0
Формат: 84x108/32

Предлагаемый вниманию читателей справочник очень популярен в Великобритании. Его авторам удалось собрать и компактно объединить под одной обложкой огромное количество информации. Здесь кратко рассмотрены практически все аспекты теории и практики современной радиосвязи — от распространения электромагнитных волн до спецификаций радиотехнического оборудования. Описаны даже способы шифрования и передачи конфиденциальной информации. Не остались без внимания и вопросы формирования, обработки и передачи сигналов в таких современных видах связи, как мобильная радиосвязь, спутниковая и транкинговая связь, беспроводная телефония.

Кроме последовательного систематического изложения вопросов радиосвязи книга содержит много разнообразной информации справочного характера. Кажется, что здесь есть все — от международного кода «Q» и азбуки Морзе до формул и таблиц для расчетов радиотехнических цепей и сведений о кодировке электронных компонентов.

Поистине, это находка для радиоинженеров и студентов радиотехнических и смежных специальностей. Более того, любой любознательный человек найдет здесь много интересного.

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Карманный справочник

Справочник содержит практически все разделы аппарата современной математики, которые используются в инженерном деле, такие как алгебра, геометрия, тригонометрия, теория матриц и детерминантов, булева алгебра и логические схемы, дифференциальное и интегральное исчисление, статистика и теория вероятностей, и т. д. Основные положения теории иллюстрируются многочисленными практическими примерами и задачами.

Справочник позволит быстро найти нужные сведения о том или ином понятии, свойстве, теореме, формуле, освежить научный багаж и вспомнить полузабытые формулы, подготовиться к вступительному экзамену и собеседованию.

Будет полезен инженерно-техническим работникам, студентам и абитуриентам технических вузов и колледжей.

Серия «КАРМАННЫЙ СПРАВОЧНИК»
Издательского дома «Додэка-XXI»

Оригинальное название
«Newnes Engineering Mathematics Pocket Book».
Third Edition
Издано по договору
с Elsevier Ltd.

ELSEVIER

ISBN 978-5-94120-150-1
9 785941 201501